微積分演習ノート

線積分 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ おさらい

$\int_\gamma f(z)\,dz$

↓

$F'(z) \to F(z)$ 原始関数

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

（微積分学の基本定理の類似。）

γが閉曲線 $\gamma(a) = \gamma(b)$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Cauchy の積分定理

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz$$

$$f(z) = a_0 + a_1(z-w) + a_2(z-w)^2 + \dots$$

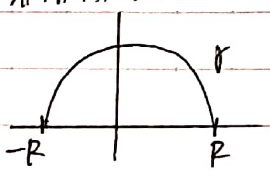
$$\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-w} = \int_\gamma \frac{a_0}{z-w} + \int_\gamma a_1\,dz + \int_\gamma a_2(z-w)\,dz + \int_\gamma a^2(z-w)^2\,dz + \dots$$

ここ周辺は原始関数あり。

$$\int_0^\infty \frac{dz}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3}$$ → これを求めるのがレポートIII

（前回の授業のものがレポートIとII）

偶関数なので。



形的には、$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+a^2)^2} = \int_\gamma \frac{dz}{(z-ai)^2(z+ai)^2}$

$z = \pm ai$

$$\int_\gamma \frac{dz}{x^2+a^2} = \int_\gamma \frac{dz}{(x+ai)(x-ai)}$$

↓ 次に考える関数

$$\frac{1}{(z-ai)^2(z+ai)^2} = \frac{1}{(z-ai)^2}\frac{1}{(z+ai)^2}$$

$a_0 + a_1(z-ai) + a_2(z-ai)^2 + \dots$

$$\int_\gamma a_0(z-ai)^{-2} + a_1(z-ai)^{-1} + a_2 + a_3(z-ai) + \dots\, dz$$

$$= \int_\gamma a_0(z-ai)\,dz + \int_\gamma a_1(z-ai)^{-1}dz + \int_\gamma a_2\,dz + \dots$$

次の問題は a_1をだすこと。 $a_1\int_\gamma (z-ai)^{-1}\,dz$

2 ヌ 木

微積分演習ノート

レポートⅣ (4)　↓実数の積分

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}$$ を求めよ。(偶関数)

ヒント

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}$$

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\frac{1}{z} = \bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$a+\cos\theta = a + \frac{1}{2}(z+\bar{z})$$

$$= a + \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

$$= \frac{z^2+2az+1}{2z}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}$$

$$= i\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+2az+1}$$

γ は単位円 $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$

$z = \cos\theta + i\sin\theta$　$\frac{dz}{d\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta$

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+2az+1} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta}\frac{dz}{d\theta}\,d\theta$$

$z^2+2az+1 = (z-\alpha)(z-\beta)$ → ベータのつもりです。

$$\alpha = -a + (a^2-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta = -a - (a^2-1)^{\frac{1}{2}}$$

ベータは1よりも大きい。

この後は各自。

レポートⅤ (5)

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}$$ を求めよ。