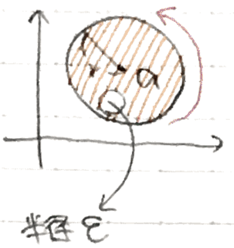
第23回 1/24

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

γはaを中心半径r



積分定理

f: 解析関数

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz$$

$z \longmapsto \frac{f(z)}{z-w}$ 解析関数

$\gamma_\varepsilon \cup \gamma$ 連合単

$$\int_{\gamma_\varepsilon \cup \gamma} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = 0 \leftarrow \text{積分定理}$$

逆向き

$$\int_{\gamma_\varepsilon \cup \gamma} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = -\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-w}\,dz + \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz$$

$\varepsilon \to 0$

zはγ_ε上を動く

$f(z) \to \boxed{f(w)}$ 定値関数

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz = f(w)\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z-w}$$

$$= 2\pi i f(w)$$

$$\therefore \boxed{f(w) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz}$$

Cauchyの積分定理

Cauchy-Riemanの方程式

$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

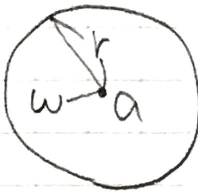
$f(z) = z$

$f+g$

αf

fg 多項式

$\frac{f}{g}$ $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1$



$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)-(w-a)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)\left(1-\frac{w-a}{z-a}\right)}$$

$$|z-a| = r > |w-a|$$

$$\left|\frac{w-a}{z-a}\right| < 1$$

等比級数 $|r|<1$

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + \cdots$$

$$\frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}} = 1 + \frac{w-a}{z-a} + \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^2 + \cdots$$

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\underbrace{\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz}_{a_1} + (w-a)\underbrace{\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a}}_{a_2} + (w-a)^2\underbrace{\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a}}_{a_3} + \cdots\cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{a_0 + a_1(w-a) + a_2(w-a)^2 \cdots\right\}$$

Moreraの定理

複素平面$\mathbb{C}$全体で定義された解析関数$f(z)$

$|f(z)| \le M$ ⤳ 定数

↓

$f(z)$は定数関数

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le |M| \times (\gamma\text{の長さ})$$

第23回　1/24

代数学の基本定理

$x^2+1=0$　実数の世界

$z^2+1=0$　$z=\pm i$

$(z-i)(z+i)$　$n\geq 1,\ a_n\neq 0$

$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1=0$

$f(z)$

背理法にて証明

$g(z)=\frac{1}{f(z)}$

$=\frac{1}{a_nz^n+\cdots+a_0}$

$=\frac{1}{z^n}\frac{1}{a_n+a_{n-1}\frac{1}{z}+a_{n-2}\frac{1}{z^2}+\cdots+a_0\frac{1}{z^n}}$

$z\to+\infty$　a_nへ

$=a$

$\therefore\ f(z)=\frac{1}{a}$