第22回 1/10

微分形式

ベクトル解析　1対1の対応

ベクトル $\Longleftrightarrow$ 1次の交代形式
　　　　　　　2次の交代形式

空間 $\mathbb{R}^3$　$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$a_1\,dx + a_2\,dy + a_3\,dz$$

$$a_1\,dy\wedge dz + a_2\,dz\wedge dx + a_3\,dx\wedge dy$$

一次の微分形式 = 一次の交代形式が対応

$$f_1\,dy\wedge dz + f_2\,dz\wedge dx + f_3\,dx\wedge dy$$

$$\leftrightarrow f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$$

$$\leftrightarrow f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz$$

スカラー場 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

スカラー場 $\xrightarrow{\text{grad}}$ ベクトル場 $\xrightarrow{\text{rot}}$ ベクトル場 $\xrightarrow{\text{div}}$ スカラー場

$\updownarrow$　0次の微分形式　$\updownarrow$　1次の微分形式　$\updownarrow$　2次の微分形式　$\updownarrow$　3次の微分形式

積分

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

正則
解析 } 関数

$\mathbb{R}^3$ 特化

$f(z) = z$

一次の微分形式　曲線，線積分

二次の微分形式　面積分

Gaussの発散定理

閉曲面 Σ，囲まれた領域 Ω

f: ベクトル場

$$\int_\Sigma f\,dS = \int_\Omega (\operatorname{div} f)\,dv$$

面積分　　体積分

$$\int_\Sigma \omega = \int_\Omega d\omega$$

面積分　　3次の微分形式

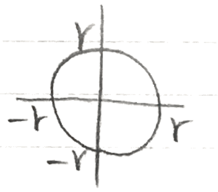
閉曲面 γ

一次の微分形式 ω

$$\int_\gamma \omega = \int_\Omega d\omega$$

線積分　　面積

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}$$



$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$
$\ni \theta$

$r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\frac{d\,r(\cos\theta + i\sin\theta)}{d\theta} = r(-\sin\theta + i\cos\theta)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} \frac{dz}{d\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r(-\sin\theta + i\cos\theta)}{r(\cos\theta + i\sin\theta)}\,d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} d\theta$$

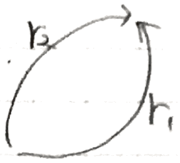
$$= 2\pi i$$

第22回 1/10

ω：1次の微分形式

$\int_\gamma \omega = \int_\Omega d\omega$ （Ωはγで囲まれた領域）

$= 0$



$\gamma_1 \cup (-\gamma_2)$

$\int_{\gamma_1 \cup (-\gamma_2)} \omega = 0$

$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = 0$

$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$f = f_1 + i f_2$

$f_i : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

$d(f\,dz) = 0$ となるのはどういう場合か

$dz = dx + i\,dy$

$d(fdz) = d(f_1 + i f_2)dz$

$= \frac{\partial f_1}{\partial x} dx \wedge (dx + i\,dy)$

$+ \frac{\partial f_1}{\partial y} dy \wedge (dx + i\,dy)$

$+ i \frac{\partial f_2}{\partial x} dx \wedge (dx + i\,dy)$

$+ i \frac{\partial f_2}{\partial y} dy \wedge (dx + i\,dy)$

$\to 0$

$dy \wedge dx \to -dx \wedge dy$

$= i \frac{\partial f_1}{\partial x} dx \wedge dy - \frac{\partial f_1}{\partial y} dx \wedge dy - \frac{\partial f_2}{\partial x} dx \wedge dy$

$- i \frac{\partial f_2}{\partial y} dx \wedge dy$

$= \left\{ \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) + i \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \right\}$

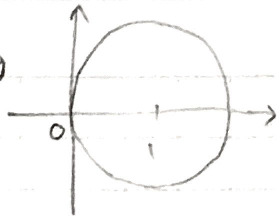
$d(fdz) = 0$ が成り立つためには

$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$

report I

$\gamma : 1 + (e^{i\theta})$ → $\cos\theta + i\sin\theta$

$\theta \in [0, 2\pi]$



$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 1}$

report II

$\int_\gamma \frac{dz}{z}$

線積分