report2

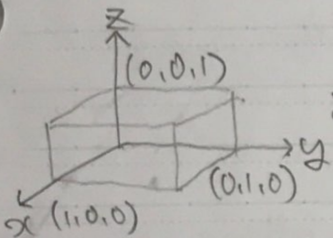
$\mathbb{F}(x,y,z) \to (x,y,z)$

$\int_\sigma \mathbb{F}\, d\sigma$

↑

曲面：原点中心半径aの球面

reportIII



どれだけ水があふれるのか

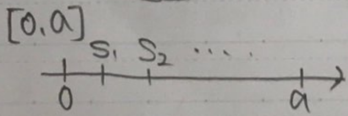
球の体積と表面積

半径rの球の体積 $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$

表面積 $S(r)=4\pi r^2$.

$V'(r)=S(r)$

半径aの球



$s_{i+1}-s_i=d_i\in D$

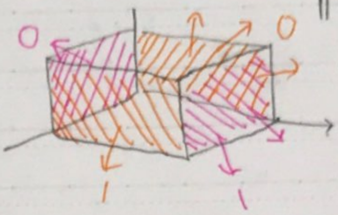
$V(a)=\sum_{i=0}^{n-1} S(s_i)d_i$

$=\int_0^a S(r)dr$

$=\frac{4}{3}\pi r^3$

ベクトル解析

閉曲面



$\mathbb{F}:(x,y,z)\to(x,y,z)$

流れの場

$1+1+1=3.$

スカラー場 $\xrightarrow{\text{grad(ient)}}$ ベクトル場

↓rot(ation)

ベクトル場 $\longrightarrow$ スカラー場

div(ergence)

$\varphi: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$\varphi': \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 線型写像

$\varphi'(x)=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x)\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x)\right]$

$(\mathrm{grad}\,\varphi)(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x)\\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x)\end{pmatrix}$

$a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$

$b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ $\nabla\varphi=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\varphi=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{pmatrix}$

$a\times b=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_3&b_3\\a_1&b_1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$

$\mathrm{rot}\,\mathbb{F}=\underbrace{\nabla\times\mathbb{F}}_{\text{ベクトル積}}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y}&f_2\\ \frac{\partial}{\partial z}&f_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial z}&f_3\\ \frac{\partial}{\partial x}&f_1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&f_1\\ \frac{\partial}{\partial y}&f_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}f_3-\frac{\partial}{\partial z}f_2\\ \frac{\partial}{\partial z}f_1-\frac{\partial}{\partial x}f_3\\ \frac{\partial}{\partial x}f_2-\frac{\partial}{\partial y}f_1\end{pmatrix}$

$\nabla \cdot \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$
内積

$= \frac{\partial}{\partial x} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} f_2 + \frac{\partial}{\partial z} \cdot f_3$

report I
(1) スカラー場
$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi) = 0$

(2) ベクトル場
$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}) = 0$

report II
$\boldsymbol{f} = (x, y, z) \mapsto (x, y, z)$
$|r|\,|r|^k$
このベクトル場の回転を計算せよ
$(x, y, z) \longmapsto (x, y, z)(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{k}{2}}$

$F' = f$
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

ガウスの発散定理
閉曲面のベクトル場 $\boldsymbol{f}$　閉曲面 σ
閉曲面の領域 Ω

$\underbrace{\int_\sigma \boldsymbol{f}\,ds}_{\text{面積分}} = \underbrace{\int_\Omega (\mathrm{div}\,\boldsymbol{f})\,dv}_{\text{体積分}}$

stokes の定理
σ を閉曲線 γ を縁とする曲面.
$\boldsymbol{f}$: ベクトル場

$\underbrace{\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}}_{\text{線積分}} = \underbrace{\int_\sigma (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}) \cdot ds}_{\text{面積分}}$

φ: スカラー場
γ: 曲線 $[a,b] \to \mathbb{R}^3$

$\varphi(r(b)) - \varphi(r(a)) = \int_r (\mathrm{grad}(\varphi)) \cdot d\boldsymbol{r}$.
線積分

$\varphi'(x) = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x)\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x)\right]$
線形写像.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$f'(x) = \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への線形写像. 比例定数.

証明
$\int_r \mathrm{grad}\varphi \cdot d\boldsymbol{r}$

$= \int_a^b (\mathrm{grad}\varphi)(r(t)) \cdot r'(t)\,dt$
内積

$= \int_a^b \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(r(t)) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(r(t)) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}(r(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1'(t) \\ r_2'(t) \\ r_3'(t) \end{pmatrix} dt$

$= \int_a^b \left(\boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial x}(r(t)) \cdot r_1'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(r(t)) \cdot r_2'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(r(t)) \cdot r_3'(t)}\right) dt$
合成関数を微分したもの

$r: [a,b] \to \mathbb{R}^3$
$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$(\varphi \circ r)(t) = \varphi(r(t))$
t で微分: 合成関数の微分

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
$\int_a^{a+d} f(x)dx = f(a)d$.
$= f(a+d) - F(a)$

$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx = \cancel{F(a_{i+1})} - F(a_i)$
$\cancel{F(a_{i+2})} - \cancel{F(a_{i+1})}$
⋮
$= F(a_n) - F(a_i)$