repository

logic@math.tsukuba.ac.jp

1/2.19

微分 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

極限→微分

十分小さく : $h^2=0 \Rightarrow h=0$

実数全体 Real number

$D=\{d\in \mathbb{R} \mid d^2=0\}$

$f(x+h)-f(x)=hf'(x)$

$\exists!\ a\in\mathbb{R}$ $\quad$ $\forall d\in D$

Existence あるaがあって　唯一一個の実数aがあって　All 任意のd∈Dに対して

$f(x+d)-f(x)=da \leftarrow f'(x)$

$(f+g)'=f'+g'$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-\{f(x)+g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

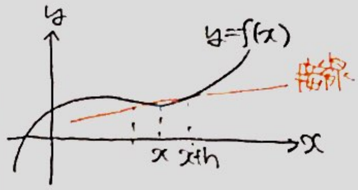
$$\{f(x+d)\}'+\{g(x+d)\}'=f(x)+df'(x)+g(x)+dg'(x)$$
$$=f(x)+g(x)+d\{f'(x)+g'(x)\}$$

$(fg)'=f'g+fg'$ (Leibnizの公式)
ライプニッツ

$$\{f(x+d)g(x+d)\}'$$
$$=\{f(x)+df'(x)\}\{g(x)+dg'(x)\}$$
$$=f(x)g(x)+f(x)dg'(x)+df'(x)g(x)+d^2f'(x)g'(x)$$
$$=d\{f(x)g'(x)+f'(x)g(x)\}d+f'(x)g'(x)\underbrace{d^2}_{0}$$

(微分の2つの考え方)

17,18,19世紀以降



$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

極限→微分

*接線とy=f(x)のgraphはどんどん近付くが一般に一致はしない

*十分hを小さくすると一致する $h^2=0\Rightarrow h=0$

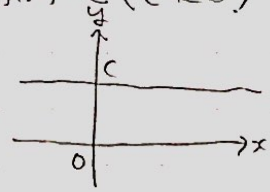
$D=\{d\in\mathbb{R}\mid d^2=0\}$

$f(x+d)-f(x)=ad$

$(\exists!\ a\in\mathbb{R})$ 唯一一個の実数aがあって

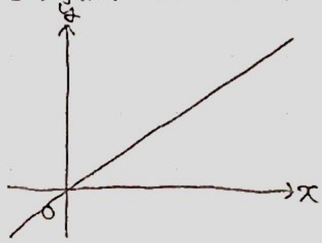
$(\forall d\in D)$ 任意のd∈Dに対して

(i) $f(x)=c$ (c:定数)



$$f(x+d)-f(x)=c-c$$
$$=0$$
$$=0d$$
$$\therefore f'(x)=0$$

(ii) $f(x)=x$



$$f(x+d)-f(x)=(x+d)-x$$
$$=d$$
$$=1d$$
$$\therefore f'(x)=1$$

4/19

宿題

(I) $f(x)=x^n$

$f(x+\alpha)-f(x)=(x+\alpha)^n-x^n$

(II) $\alpha\in\mathbb{R}$

$(\alpha f)'=\alpha f'$

(III) $\cos' x$ を求めよ

$\cos(x+\alpha)-\cos x$

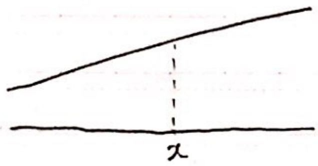
(iii) $f(x)=x^2$

$f(x+\alpha)-f(x)=x^2+2x\alpha+\alpha^2-x^2$

$=2x\alpha+\alpha^2$ ($\alpha^2 \to 0$)

$=2x\alpha$

$\therefore f'(x)=2x$



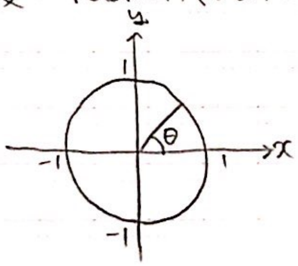
慣性の法則

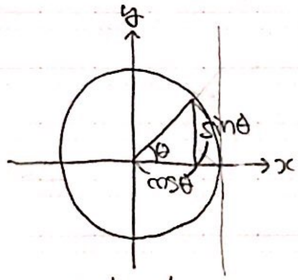
等速度

→無限小における慣性の法則 $\alpha\in D$

三角関数

度→radian(ラジアン)





$\sin\alpha=\alpha$

$\cos\alpha=1$

$\sin^2x+\cos^2x=1$

$\alpha^2+1^2=1$ ($\alpha^2=0$)

$\sin\alpha-\sin 0=\alpha-0$

$=1\alpha$

$\therefore \sin 0'=1$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$

$\sin(x+\alpha)-\sin x$

$=\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha-\sin x$ ($\cos\alpha=1$, $\sin\alpha=\alpha$)

$=\sin x+\alpha\cos x-\sin x$

$=\alpha\cos x$

$\sin x'=\cos x$

$\cos\alpha-\cos 0$

$=1-1$

$=0\alpha$

$\cos 0'=0$

(ベクトル解析) for 電磁気学 19C Maxwellの方程式

電場⇄磁場 ⇨ 電磁波

(IV)

$\left(\frac{f}{g}\right)'=\cancel{\frac{fg-fg'}{g^2}}$

$\frac{f(x+\alpha)}{g(x+\alpha)}-\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)+f'(x)\alpha}{g(x)+g'(x)\alpha}-\frac{f(x)}{g(x)}$

$=\frac{\{f(x)+f'(x)\alpha\}g(x)-f(x)\{g(x)+g'(x)\alpha\}}{\{g(x)+g'(x)\alpha\}g(x)}$

分母と分子に $g(x)-g'(x)\alpha$ をかける

$=\frac{\quad}{g(x)^2-\{g'(x)\}^2\alpha^2}$

指数関数 $\overset{\text{逆関数}}{\rightleftarrows}$ 対数関数

$2\cdot 2\cdot 2=2^3$

底10→e

$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$D=\{\alpha\in\mathbb{R}\mid\alpha^2=0\}$

$f(x)=10^x$ の微分

$\boxed{10^\alpha-10^0=a\alpha}$ ($10^0=1$)

$(f(\alpha)-f(0))$

$f(x+\alpha)-f(x)=10^{x+\alpha}-10^x$

$=10^x10^\alpha-10^x$

$=10^x(10^\alpha-1)$

$=10^x\cdot a$

$f(x+d)-f(x)=f'(x)$

4/26

底の変換

$10 \to e$

eは正の任意の実数

$g(x)=e^x$

$e=10^{\log_{10}e}$

$g(x)=(10^{\log_{10}e})^x$

$=10^{x\log_{10}e}$

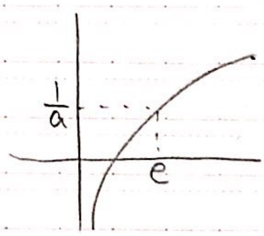
g(x)を0で微分 *スカラー倍しかされていないため

$g(d)-g(0)=10^{d\log_{10}e}-10^0$ ↳1

$=a(\log_{10}e)d$

$\therefore g'(0)=a(\log_{10}e)$

$g'(0)=1$



$g(x+d)-g(x)$

$=e^{x+d}-e^x$

$=e^x\underbrace{(e^d-1)}_{d}$

$=e^x d$

$\therefore g'(x)=e^x=g(x)$

$\therefore g'(x)=g(x)$

$*$ $d_1\in D$ かつ $d_2\in D$ のとき $d_1+d_2\in D$ とはならない

$(d_1+d_2)^2=d_1d_1+2d_1d_2+d_2d_2$

0　0?　0

$(d_1+d_2)^3=d_1^3+3d_1^2d_1+3d_1d_2+d_2^3$

0　0　0　0

$=0$

$D_n=\{d\in\mathbb{R}\mid d^{n+1}=0\}$

$D=D_1$

$d_1\in D_1,\ d_2\in D_1 \Rightarrow d_1+d_2\in D_2$

$(k=l=1)$

(report)

(I)

$d_1\in D_k,\ d_2\in D_l \Rightarrow d_1+d_2\in D_{k+l}$ を示せ

$d^{k+1}=0$　$d^{l+1}=0$

二項定理を用いる

(II)

$d_1,d_2,\cdots,d_n\in D=D_1 \Rightarrow d_1+\cdots+d_n\in D_n$

$(d_1+\cdots+d_n)^{n+1}=0$

nに関する数学的帰納法

$d_1\in D$

$\{f(x)+d_1\}'=f(x)+f'(x)\cdot d_1$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$d_1, d_2\in D$

$\{f(x+d_1+d_2)\}'=f(x+d_1)+f'(x+d_1)d_2.$ またビジ

$=f(x)+f'(x)d_1+\{f'(x)+f''(x)d_1\}d_2$

$=f(x)+f'(x)(d_1+d_2)+f''(x)d_1d_2$

(III)

$d_1, d_2, d_3\in D$

$\{f(x+d_1+d_2+d_3)\}'=f(x+d_1+d_2)+f'(x+d_1+d_2)d_3$

またビジ

$=f(x)+f'(x)(d_1+d_2)+f''(x)d_1d_2+\{f'(x)+f''(x)(d_1+d_2)$

$+f'''(x+d_1+d_2)\}d_3$

(IV)

$f(x+d_1+d_2+d_3+d_4)$