創造的な教材・指導法及びカリキュラム

－中高６カ年から大学へ－

（５年計画の４年次）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
三井田裕樹・更科　元子・鈴木　清夫
須田　　学・須藤　雄生・町田多加志
吉崎　健太

創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

ー中高６カ年から大学へ（５年計画の４年次）ー

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科

三井田 裕樹・更科 元子 ・鈴木 清夫 ・須田 学
須藤　雄生・町田 多加志・吉崎　健太

要約

教材開発は，基本姿勢として生徒と教員の相互作用で築き上げるものと考えられる。毎時の授業のなかで，教員が提示した中心課題に対し，生徒が自らの発想や，解決にいたる道筋，さらなる発展課題などを見つけ，発表する。教員は，生徒の発想を拾い上げ，生徒同士の議論を整理し，さらに課題を洗練させる。このような創造的な教材とそれに対する生徒と教員の相互作用は，本校の数学教育において長年中心的な役割を果たしている。

2002 年度からスーパーサイエンスハイスクール(SSH)に指定されている本校で，数学科は上記の考えに立ちながら，大学や実社会にも繋がる中高の教材・指導法及びカリキュラムを開発すべく研究を行っている。開発した教材は 76 に及び，教員研修会の開催をはじめ各種 SSH 事業の実施を通し，さらなる研究の充実を図っている。

キーワード：サイエンスコミュニケーション，中高大院連携

1. はじめに

2013（平成 25）年度入学生から全面実施された新学習指導要領は，数学・理科においては，2012 年度から先行実施されており，この 3 月（2015 年）に最初の卒業生を出した。このような情勢の中，数学教育への関心は日増しに高まりを見せている。それは，本校における数学科教員研修会の，全国からの参加状況をみても実感するところである。

本校数学科では，かねてより，筑波大学をはじめ，他大学の数学関係者の協力も得ながら，大学や社会での学びにつながる数学教材の開発および指導法の研究を行っている。特に，スーパーサイエンスハイスクール（以下「SSH」と略する）の指定を受けて以来，中長期的な見通しをもち，これらの研究を推進してきた。

2002 年度から指定を受けた 1 期目の研究『先駆的な科学者・技術者を育成するための中高一貫カリキュラム研究と教材開発』では，大学での学びにつながる数学に注目し，特に「統計」（集団の特徴を掴む考え方や手法）および「微分方程式」（微小な変化から関数の特徴を捉える考え方）に関する教材開発と授業実践を行った。その後，2007 年度より指定を受けた 2 期目の研究『国際社会で活躍する科学者・技術者を育成する中高一貫カリキュラム研究と教材開発』では，これら以外の分野を含めて，生徒も教員も興味を持って取り組めるような魅力的で有効な教材を開発し，中高一貫カリキュラムの一層の充実を目指した。

2012 年度以降も『幅広い教養と強い探究心をもつ国際性豊かな最先端 研究者を育成する高大連携プログラムの研究と実施』をテーマに，継続して教材の開発に取り組んでいる。

その結果、これまでに 76 の教材を開発し，カリキュラムに配置するとともに，教員研修会などで発表している。また，教材・カリキュラム開発以外に，生徒の数学への興味関心を高めるための「特別講座」，サイエンスコミュニケーション能力の育成を目指した筑波大学インターンシップと連動した総合学習「ゼミナール」「テーマ研究」，数学オリンピックや数学研究部など生徒の数学的活動の支援等を実施している。以下、その取り組みを報告する。

<Project research>
Creative Teaching Materials, Method and the Development of the Curriculum
- From six years of a junior and senior high school to the university -

2. 今年度（2015 年度）の研究

2.1. 教材・カリキュラムの開発

本校における教材開発の基本姿勢は,「生徒と教員の相互作用で築き上げる」ものであると言える。教員は,これまでに蓄積された経験，数学教育の実践における先行研究などに，自らの感性も交えて，毎時の授業のなかで，生徒が考えるに値する素材を中心課題として提示する。生徒はそれに反応し，自らの発想や，解決にいたる道筋, さらなる発展課題などを見つけていく。その過程では，自らの考えを発表したり，それに対する他の生徒の反応をもとに，足りない部分を補ったりといった活動も行われる。教員は，そこで得られた生徒の発想や，生徒同士で高まった議論を整理し，授業のなかで生徒の思考水準を高めていくとともに，さらに課題を洗練させていく。またときには，週に１度行われる本校数学科の教科会においてその事例が報告，共有され，教員同士でも相互に教材を深めていく。この繰り返しが本校数学科における教育実践の中心であり，また開発された教材はその成果であると位置づけられよう。

本校数学科では，専任教員がそれぞれ同じ生徒をできるだけ継続して担当し，中高６年間さらに大学での学びをも見通した授業を行うように努めている。そこでの共通した目標である『いろいろな現象や事柄に潜む仕組みや法則を数学的に解析し, その本質を捕まえ,そしてそれらを表現できるようになる』ことも，本校における数学科の教育実践を端的に表している。例えば，入学してすぐの中学１年生には，とにかく自分の考えを発表させることに主眼をおいた指導を行い，ときには生徒間で議論をさせたり，発展課題をレポートにまとめたりといった活動を授業の中に取り入れている。これらの活動が，とかく中学受験を経験した子どもたちにありがちな「問題を解き，正解に到達したら勝ち，終わり」という価値観からの脱却を促し,「考える過程とそれを表現することこそが数学の学習の中心である」という意識の涵養につながっていく。また,一方で教員は，その過程で生み出される「生徒自身によって表現された数学」を吸い上げて授業に還元しながら，生徒とともに教材をみがき，整理して形に残すことが務めになってくるということである。

これまでに開発した教材は，後ページに記載した一覧表の通りであるが，なかでも今年度新たに研究し,まとめた教材は，以下の４つである。教材につけられた記号についても，後ページに説明があるので，参照されたい。

a1-4	速算術
A1-5	オイラー関数について
A2-3	斜交座標の薦め
A2-4	漸化式
A3-3	複素数と複素数平面
g3-5	双心四角形の性質
D2-2	３次関数の性質

2.2. 教員研修会の実施

開発した教材・カリキュラムを数学科教員研修会で公開し，全国に広めるとともに，本校における今後の研究の指針を得ることとしている。今年度は８月に交流会支援により徳島で, 11 月には本校教育研究会にて公開授業を実施した。これらについて報告する。

開発した教材・カリキュラムは教員研修会などで公開し，参加者から今後の研究の指針を得ている。最近の研修会の様子を報告する。

① 全国 SSH 交流会支援教員研修
数学科教員徳島研修会

本校数学科が研究開発した教材等を発表し研究協議するとともに，徳島県立城南高等学校及び香川県立観音寺第一高等学校での取り組みを伺い，今後に資することを目的とした研修会である。

■ 実施概要

日程 : 平成 27 年８月 27 日（木）
会場 : 徳島県立城南高等学校

■研究授業

・「絶対値を含む関数のグラフによる運賃の表現」
　授業者 : 須田　学（筑波大駒場教諭）
　生徒：　城南高校応用数理科２年生
・「2 次関数のグラフと x 軸との位置関係」
　授業者 : 長瀬慎一郎（城南高校教諭）
　生徒：　城南高校応用数理科１年生
研究授業についての研究協議

■研究報告

本校及び城南高校，香川県立観音寺第一高校による報告，意見交換

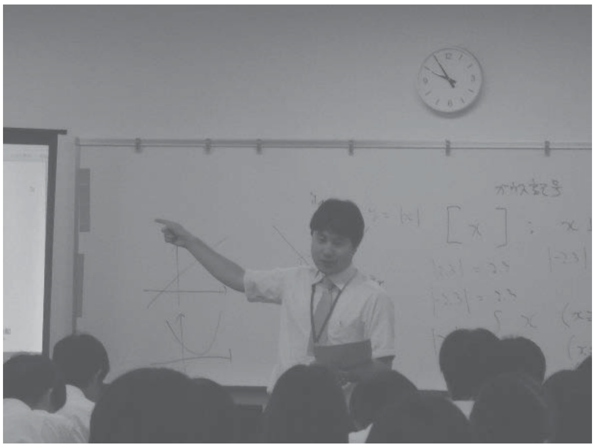
参加者 : 城南高校の先生，観音寺第一高校の先生，徳島県内の高等学校の先生，本校教員　約 50 名
（筑波大駒場からの発表内容）
・本校数学科SSHの取り組み　　三井田裕樹

・複素数と複素数平面　　　　　更科元子
・斜交座標の薦め〜ベクトルの活用を目指して
　　　　　　　　　　　　　　　　　鈴木清夫
・双心四角形の探求　　　　　須藤雄生
・大学での学びに繋がる筑駒の統計教育
　　　　　　　　　　　　　　　　町田多加志
・生徒の課題発見能力を育む教材としてのオイラー関数
　　　　　　　　　　　　　　　　　吉崎健太

（研究授業の課題から）

問題

岡山から大阪，大阪から東京の新幹線での移動距離がそれぞれ 180ｋｍ，540ｋｍとする。SSH 指定校で生徒研究発表会を開くとき，交通費の節約とエコの観点から，参加する生徒の新幹線での移動距離が最短になるよう開催する都市を決める。参加する生徒が，岡山３名，大阪０名，東京１名のとき，開催する都市をどこにすればよいか。ただし開催都市は，新幹線の沿線上であれば，岡山・大阪・東京に限らなくても良いとする。



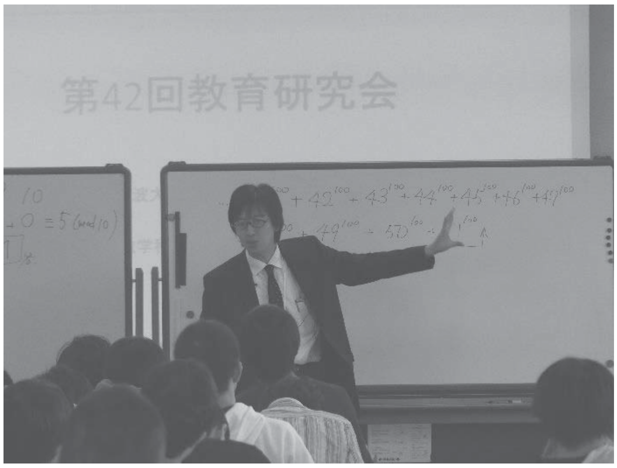
・検証

熊本研修会（2012 年度），香川研修会（2013 年度）北海道研修会（2014 年度）に続き，今回も研究授業を含む教員研修会となった。

徳島県立城南高校の生徒に協力してもらい，本校数学科の教材に取り組む研究授業を行った。教員の報告・意見交換にとどまらず，具体的な教材に対する生徒の活動を，本校教員と城南高校の先生の授業で比較して見ることで，先生方だけでなく参加生徒からも貴重な意見をいただくことができた。また，新しい開発教材も発表した。

また，四国での数学教育の様子や，各校の校内における取り組みに関する情報交換ができ，大変有意義な会であった。このように地方に行って，他県の多くの先生方と現地で交流できることは，SSH の取り組みならではのことである。会場をお願いした徳島城南高校，ご協力いただいた観音寺第一高校の先生方に深く感謝したい。

② 第 42 回教育研究会
　　　　　　　2015 年 11 月 21 日（土）本校にて
研究会主題「グローバル人材の育成をめざして」
研究授業　：
中学３年 『確率』　　授業者　須藤雄生
高校１年 『整数』　　授業者　吉崎健太
数学科公開授業・研究協議会参加者数：約１４０名



教育研究会は、参加者に本校の授業を実際に見ていただく貴重な機会である。今年度は中 3，高 1 の授業を公開するとともに研究発表を行い，研究協議会においていろいろなご意見をいただいた。今後の研究活動に生かしていきたい。

2.3. 数学特別講座

SSH 事業として，魅力ある内容に関する「数学特別講座」を大学の先生や卒業生に実施していただいている。

この講座の目的は，中学高校の授業で学ぶ数学が将来どのように発展するのか，どのように活用されるのか等を知ることを通して，生徒の数学への興味・関心を高めるとともに，数学に対する理解を深め，数学を学ぶ意義を感じてもらうことである。なお，これらの内容も授業で活用できる教材として研究する必要があると考えている。

2015 年度に実施した特別講座のテーマと日程・講師は以下の通りである。回数は 14 年前からの通算，テーマと内容は生徒への募集案内に記載したものである

募集案内を配布して希望者を募り，期末考査後の特別授業期間中に講義して頂いた。

○第 43 回数学特別講座
『「不可能立体の不条理の世界」
〜見たものを信じてよいのでしょうか〜』

日　時 : 平成 27 年 12 月 9 日（水）13:30〜15:00
場　所 : オープンスペース
講　師 : 杉原　厚吉 氏
（明治大学先端数理科学インスティチュート教授）
内　容 :（参加募集案内より一部抜粋）

百聞は一見にしかずといわれますが、見たからといって本当のことが理解できたと安心するのは危険です。なぜなら、実際とは違うように見えてしまう目の錯覚という現象があるからです。ここでは、不可能立体を素材に使って、映像から奥行きや立体を知覚する際の錯覚を観察し、なぜそのような錯覚が起こるのかを数理モデルを使って考えていきます。特に、立体の本当の形を知った後でも錯覚が起こり続けるという脳の不条理な振る舞いから、映像文化の危うさと深刻さがわかっていただけると思います。また、このような錯覚の研究に数学が活躍する姿もご紹介したいと思います。

○第 44 回数学特別講座　『「高次」の統計学』

日　時 : 平成 27 年 12 月 11 日（金）13:30〜15:00
場　所 : 50 周年記念会館
講　師 : 矢田　和善 氏
（筑波大学数理物質系　助教）
内　容 :（参加募集案内より一部抜粋）

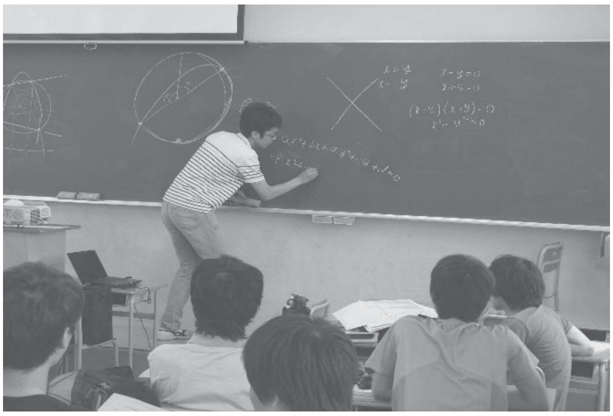
昨今の統計ブームに伴って，学問としての統計学が注目を浴びております．高校では必修化されたり，「統計学が最強の学問」と謳った書籍が大ヒットしたりしております．私には最強とまで強く断言はできませんが，やはり統計学は必要不可欠で強力なツールと言えます. 統計学の特徴の一つは，物事の精度を数学的に保証できるという点です. すなわち，統計学の背後には数学が隠れています. 本講演では，二つの高次な統計解析手法とその背後にある高度な数学を紹介したいと思います.

まず高次漸近理論に着目し，より正確な精度保証を与える高次の近似解を導出する．その解を用いて，医薬品データの高精度な統計解析の例を紹介したいと思います．一方，ゲノム科学等に見られる高次元データの一つの特徴は，データがもつ次元数の膨大さにあります(所謂ビッグデータです)．通常の統計解析手法では高次元データの推測に精度を保証することができず，間違った解析結果を導くことさえあります．これに対して，(我々の提案した) 高次元ならでは幾何学的な構造を利用した統計解析手法を紹介し，その数学的な背景を例示したいと思います.

2.4. 学年を越えた少人数学習の研究と実践

サイエンスコミュニケーション能力の育成を目指して，高校 2 年生の総合学習「ゼミナール」を，筑波大学大学院生が参加する形で実施している。これは筑波

大学大学院数理物質科学研究科(DC)の講座「数学インターンシップ」(1単位)と連動したものであり，高校3年生の課題研究につながる。生徒は研究成果をレポートにまとめるとともに，論文集を作成し，全国で実施される様々な生徒研究発表会などで発表している。



（ゼミナールOBである高校3年生の講義）

2015年度は,筑波大学の坂井公先生と竹内耕太先生,および大学院生のご指導を受けながら，数学好きな生徒14名が集まって,『65期のつくコマ数学科！』をテーマに，様々な数学の問題や性質について深く掘り下げるような研究に取り組んでいる。また，ゼミナールの中では，大学院生やゼミナールOBである高校3年生・大学1年生の講義もあり，高度な数学に触れる機会もある。ゼミナールの総括として，中学3年生も参加してプレ発表を行う。その際，中学3年生のテーマ学習で数学を選択している生徒からの発表も行った。参加者のアンケートから，相互に刺激を受けていることが窺え，効果的な取り組みであると考えている。

また,大阪府立大手前高校主催の「マス・フェスタ」や明治大学先端数理科学インスティチュート主催「高校生による MIMS 現象数理学研究発表会」のような生徒研究発表会にも積極的に参加し，口頭発表やポスター発表を行っている。

（マス・フェスタでの口頭発表）

2.5. 生徒の数学的活動の支援

特別講座同様,生徒の数学への興味関心を高めるために数学オリンピック(JMO)・数学ジュニアオリンピック(JJMO)への参加を募っている。今年度も多数が応募している。国際数学オリンピックには，日本が初参加した第32回大会から2015年夏の第54回大会までに，のべ36名の生徒が，2012～14年国際数学競技会ではのべ6名の中学生が，日本代表として参加した。

数学オリンピック　IMO成績

2013　第54回国際数学オリンピック（IMO）　コロンビア大会の日本代表選手2名銀メダル獲得（2013.7月）

2014　第55回国際数学オリンピック（IMO）南アフリカ大会の日本代表選手1名金メダル 1 名銀メダル獲得（2014.7月）

2015　第56回国際数学オリンピック（IMO）タイ大会の日本代表選手1名銀メダル 1 名銅メダル獲得（2015.7月）

・部活動「数学科学研究会（MATHIC）」の活動支援

本校数学科では，数学に興味関心を持った生徒が集まり研究活動を行い，数学を楽しむ部活動「数学科学研究会」の支援を行っている。今年度も文化祭での発表に多数の来場者を得るとともに，研究レポート集“Café Bollweck”を発行した。

3. 開発教材一覧および開発教材の実際

★印　今年度開発中のもので本稿に記載。

「A. 代数(Algebra)」,「An. 解析(Analysis)」,「G. 幾何(Geometry)」,「P. 確率(Probability)」,
「S. 統計(Statistics)」,「D. 微分方程式(Differential Equation)」,「O. その他(Others)」

各項目を整理する際，中学を小文字，高校を大文字にして，校種を区別した。また，教材開発の際に想定している，もしくは，実際に授業をおこなった学年を数字で示した。学年を特定していない教材や複数学年での取り扱いを想定している教材は，数字の代わりに「f」を用いた。

〔例〕　an2.　合成関数とグラフ

An.は解析であり，先頭が小文字なので中学生対象，すなわち中学2年の「解析」の教材を表す。

以下，表に続いて，★で示した教材について具体的に報告する。

開発教材一覧(筑波大学附属駒場中・高等学校数学科)　　　２０１５年度

a1.	整数	2008
a1-2.	有理数	2007
a1-3.	剰余類の演算とウィルソンの定理	2014
a1-4.	速算術	2015★
a3.	暗号理論と整数論	2006
A1.	数と方程式	2008
A1-2.	平方根の連分数展開について	2012
A1-3.	高校における整数問題	2014
A1-4.	開平法と連分数による平方根の近似値	2014
A1-5.	オイラー関数について	2015★
A2.	離散な数列と連続な関数	2009
A2-2.	ΣＫ＾４と区分求積法	2011
A2-3.	斜交座標の薦め	2015★
A2-4.	漸化式	2015★
A3.	置換と正多面体群	2007
A3-2.	１次変換の線形性	2008
A3-3.	複素数と複素数平面	2015
an1.	2 元 1 次方程式とその応用	2007
an2.	合成関数とグラフ	2009
an3.	絶対値を含む関数のグラフ	2009
an3-2.	絶対値とガウス記号を含む関数のソフトウエアによるグラフ描画	2010
An1.	2 次関数	2007
An1-2	2 次関数（２）	2009
An1-3	和や積のグラフ	2010
An1-4.	図で証明する三角関数の性質	2013
An2.	円周率の近似	2007
An2-2.	三角関数表を作る	2006
An2-3.	加法定理から導き出される多項式	2006
An2-4.	三角関数の和と積の周期	2011
g1.	四角形の合同条件	2008
g1-2.	作図の教材	2009
g1-3.	四角形の性質（包含関係）	2010
g1-4.	正多面体の面や辺の作る角	2012
g1-5.	三平方の定理	2013
g2.	チェバ・メネラウスの定理	2007
g3.	立方体の切断	2007
g3-2.	反転法	2007
g3-3.	立方体の切断（２）	2009

g3-4.	ヘロンの公式の幾何的証明と応用	2013
g3-5.	双心四角形の性質	2015★
G1.	四面体の幾何	2008
G1-2.	デカルトの円定理	2009
G1-3.	正多角形と等積な正方形の作図法	2013
G2.	正１７角形の作図	2008
G2-2.	ベクトルの内積と方べきの定理	2011
s1.	統計の基本	2006
s2.	標準偏差・近似直線	2006
s3.	正規分布と標準化	2006
s3-2.	シミュレーションによる授業	2006
S1.	回帰直線・近似曲線	2006
S1-2.	数理統計学入門	2009
S2.	残差分析によるデータ系列の関係	2007
S3.	主成分分析入門	2007
S3-2.	正規分布の平均の推定	2008
d1.	自然数の和，平方数の和，立方数の和	2007
d1-2.	『数える』	2010
d2.	グラフや図形の移動・変形	2006
d3.	２次関数の接線	2006
d3-2.	面積・体積	2006
d3-3.	最大・最小	2006
d3-4.	放物線で囲まれる面積	2013
d3-5.	場合の数 ～樹形図から漸化式へ～	2014
D1.	包絡線	2006
D2.	グラフ描画の方法 －テクノロジーへの挑戦－	2007
D2-2.	３次関数の性質	2015★
D3.	包絡線(その２)	2006
D3-2.	微分方程式	2006
D3-3.	微分方程式の応用	2006
D3-4.	関数のグラフの描画法	2008
D3-5.	曲線と面積	2008
Of.	4 元数を高校数学へ	2007
O2.	有限世界の数学	2007
p2.	身近な確率・連続変量の確率	2011
Pf1.	組み合わせの確率モデル	2007
Pf2.	EBI と確率・統計	2007
Pf3.	無限集合の確率	2008

a1-4.　速算術

関連分野：	代数分野
高等数学：	整数論
対象学年：	中学１年生，高校１年生
関連単元：	数と式，整数の性質
教 材 名：	速算術

《展開・因数分解の公式の速算術への応用》

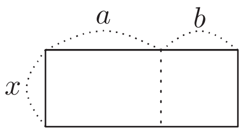
展開・因数分解の公式は様々あるが，代数的に扱うことがほとんどである．本稿では，これらの公式を，実際の計算における速算術へ適用し，その有用性を確認する．また，分配法則から機械的に導かれ，抽象的になりがちな公式の幾何的表現も考察し，公式の意味を実感できるようにする．

a1-4.1. 展開・因数分解の公式とその幾何的表現

分配法則

$$(a+b)x = ax + bx$$

の幾何的表現は，特に $a>0$, $b>0$, $x>0$ として，次のような長方形の分割が考えられる．



展開・因数分解の公式は分配法則から導かれるが，基本的なものについて，同様に幾何的表現を考えてみよう．

問 1. 次の式を計算し，特に $x>0$, $y>0$, $x>y$ として，その幾何的表現も適当な図形を与えて考えよ．

(1) $(x+y)^2$

(2) $(x-y)^2$

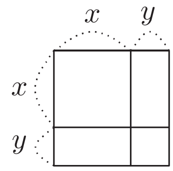
(3) $(x+y)(x-y)$

(4) $(a+b)(x+y)$

解

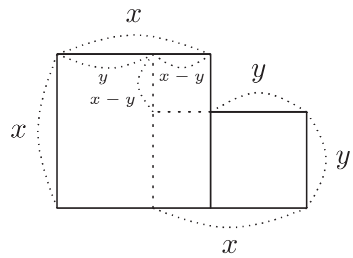
(1) $(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x(x+y) + y(x+y)$
$= x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

【幾何的表現】



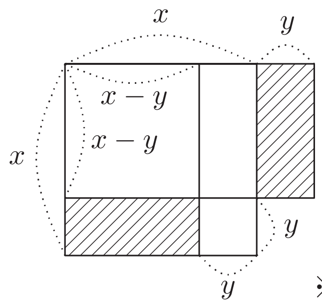
(2) $(x-y)^2 = (x+(-y))^2 = x^2 + 2x(-y) + (-y)^2$
$= x^2 - 2xy + y^2$

【幾何的表現】



(3) $(x+y)(x-y) = x(x-y) + y(x-y)$
$= x^2 - xy + yx - y^2 = x^2 - y^2$

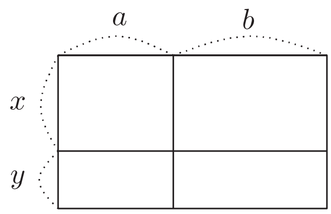
【幾何的表現】



※斜線部は同じ面積

(4) $(a+b)(x+y) = a(x+y) + b(x+y)$
$= ax + ay + bx + by$

【幾何的表現】



□

ここでは，速算術で利用する最も基本的な公式のみを扱ったが，他の公式も幾何的表現を考えてみると，公式の意味をより深く理解することができる．

次に，これらの公式の簡単な応用を扱う．

問 2. 次の式を計算せよ．

(1) $(a-b)(x-y)$

(2) $(x+a)(x+b)$

(3) $(10a+b)(10a+c)$

(4) $(a-b)^3$

解

(1) $(a-b)(x-y) = (a+(-b))(x+(-y))$
$= ax + a(-y) + (-b)x + (-b)(-y)$
$= ax - ay - bx + by$

(2) $(x+a)(x+b) = x^2 + xb + ax + ab$
$= x^2 + (a+b)x + ab$ ※ x で整理した場合

(3) $(10a+b)(10a+c) = (10a)^2 + (b+c)10a + bc$
$= 100a^2 + 10(b+c)a + bc$
※ a で整理した場合

(4) $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2-2ab+b^2)$
$= a(a^2-2ab+b^2) - b(a^2-2ab+b^2)$
$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$
$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ □

ここで確認した等式は，速算術でよく利用される．

a1-4.2. 速算術の基本

問 1，問 2 で証明した公式を適用して，速算術の基本を確認してみよう．

問 3. 次の式を工夫して計算せよ．

(1) 99×78

(2) 999×681

(3) 103×97

(4) 1002×998

(5) 98×103

(6) 998×997

(7) 998^3

解

(1) $99 \times 78 = (100-1) \times 78 = 7800 - 78$
$= 7700 + 100 - 78 = 7700 + 22 = 7722$

(2) $999 \times 681 = (1000-1) \times 681 = 681000 - 681$
$= 680000 + 1000 - 681 = 680000 + 319$
$= 6800319$

(3) $103 \times 97 = (100+3)(100-3) = 100^2 - 3^2$
$= 10000 - 9 = 9991$

(4) $1002 \times 998 = (1000+2)(1000-2) = 1000^2 - 2^2$
$= 1000000 - 4 = 999996$

(5) $98 \times 103 = (100-2)(100+3)$
$= 100^2 + (-2+3) \times 100 - 2 \times 3$
$= 10000 + 100 - 6 = 10094$

(6) $998 \times 997 = (1000-2)(1000-3)$
$= 1000^2 + (-2-3) \times 1000 + (-2) \times (-3)$
$= 1000000 - 5000 + 6$
$= 995000 + 6 = 995006$

(7) $998^3 = (1000-2)^3$
$= 1000^3 - 3 \times 1000^2 \times 2 + 3 \times 1000 \times 2^2 - 2^3$
$= 1000000000 - 6000000 + 12000 - 8$
$= 994000000 + 11992 = 994011992$ □

問 3 の (1)，(2) の計算結果を基に速算術を考えてみると，

$$
\begin{aligned}
99 \times a &= (100-1)a = 100a - a \\
&= 100(a-1+1) - a \\
&= 100(a-1) + 100 - a \quad (1 \leqq a \leqq 99), \\
999 \times b &= (1000-1)b = 1000b - b \\
&= 1000(b-1+1) - b \\
&= 1000(b-1) + 1000 - b \quad (1 \leqq b \leqq 999)
\end{aligned}
$$

が得られる．ここで，

$$1 \leqq 100 - a \leqq 99, \quad 1 \leqq 1000 - b \leqq 999$$

より，それぞれ，百の位，千の位への桁上がりがないことに注意しておきたい．

例 (2 桁の数の積) 次に与えた計算は，速算術の基本であり，様々な本で紹介されている．「たすきがけ」と呼ばれる「$3 \times 7 + 5 \times 4$」の計算が容易にできるのであれば，暗算も可能となる．

【暗算】

$$
\begin{array}{rccccl}
 & & & 3 & 5 & \\
 & & \times & 4 & 7 & \\
\cline{2-5}
3\times 4 \longrightarrow & 1 & 2 & 3 & 5 & \longleftarrow 5\times 7 \\
 & & & 4 & 1 & \longleftarrow 3\times 7+5\times 4 \\
\cline{2-5}
 & 1 & 6 & 4 & 5 &
\end{array}
$$

【立式】

$$
\begin{array}{rccccl}
 & & & 3 & 5 & \\
 & & \times & 4 & 7 & \\
\cline{2-5}
3\times 4 \longrightarrow & 1 & 2 & 3 & 5 & \longleftarrow 5\times 7 \\
 & & 2 & 1 & & \longleftarrow 3\times 7 \\
 & & 2 & 0 & & \longleftarrow 5\times 4 \\
\cline{2-5}
 & 1 & 6 & 4 & 5 &
\end{array}
$$

この速算術の仕組みは，

$$35 = 3\times 10+5,\quad 47 = 4\times 10+7$$

のように，2 桁の数を $10a+b$，$10c+d$ と表せることを利用して，次のように証明できる．

$$
\begin{aligned}
&(10a+b)(10c+d)\\
&\quad = 10a\times 10c+10a\times d+b\times 10c+bd\\
&\quad = 100ac+10(ad+bc)+bd
\end{aligned}
$$

□

a1-4.3. 速算術の応用

次に，より複雑な速算術について考えてみよう．ただし，計算が簡潔になる一方で，ある程度の条件が必要であることに注意しておきたい．

問 4. 次に与えた計算において，速算術を考え，一般に成立することを文字を使って証明せよ．

(1) 2 桁の数と 11 の積

$$
\begin{array}{rrr}
 & 7 & 2\\
\times & 1 & 1\\ \hline
7 & 9 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr}
 & 8 & 7\\
\times & 1 & 1\\ \hline
9 & 5 & 7
\end{array}
$$

(2) 一の位が 5 である 2 桁の数の 2 乗

$$35^2 = 1225,\quad 75^2 = 5625$$

(3) 一の位が 5 である 3 桁の数の 2 乗

$$995^2 = 990025,\quad 205^2 = 42025$$

(4) 十の位が同じで一の位の和が 10 である 2 桁の数同士の積

$$
\begin{array}{rrrr}
 & & 3 & 4\\
 & \times & 3 & 6\\ \hline
1 & 2 & 2 & 4
\end{array}
$$

(5) 一の位が同じで十の位の和が 10 である 2 桁の数同士の積

$$
\begin{array}{rrrr}
 & & 4 & 8\\
 & \times & 6 & 8\\ \hline
3 & 2 & 6 & 4
\end{array}
$$

(6) 百の位が同じで下 2 桁の和が 100 である 3 桁の数同士の積

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 7 & 4 & 5\\
 & & \times & 7 & 5 & 5\\ \hline
5 & 6 & 2 & 4 & 7 & 5
\end{array}
$$

(7) 一の位が同じで上 2 桁の和が 100 である 3 桁の数同士の積

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 4 & 6 & 7\\
 & & \times & 5 & 4 & 7\\ \hline
2 & 5 & 5 & 4 & 4 & 9
\end{array}
$$

(8) 百の位の和が 10 で下 2 桁が同じである 3 桁の数同士の積

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 3 & 1 & 8\\
 & & \times & 7 & 1 & 8\\ \hline
2 & 2 & 8 & 3 & 2 & 4
\end{array}
$$

解

(1) $(10a+b)\times 11 = 110a+11b$
$= 100a+10a+10b+b = 100a+10(a+b)+b$

(2) $(10a+5)^2 = (10a)^2+2\times 10a\times 5+5^2$
$= 100a^2+100a+25 = 100a(a+1)+25$
($1 \leqq a \leqq 9$ のとき)
このとき，$(10a+5)^2$ の下 2 桁は，“25” となることに注意しておきたい．

(3) (2) において，$10 \leqq a \leqq 99$ のときを考えればよい．

(4) $b+c=10$ とする．
$(10a+b)(10a+c) = (10a)^2+(b+c)10a+bc$
$= 100a^2+10a(b+c)+bc$
$= 100a^2+10a\times 10+bc$
$= 100a(a+1)+bc$
ここで，bc は最大 2 桁であることに注意しておく．

(5) $a+c=100$ とする．
$(10a+b)(10c+b)$
$= 10a\times 10c+10a\times b+b\times 10c+b^2$
$= 100ac+10(a+c)b+b^2$

$= 100ac + 10 \times 10 \times b + b^2$
$= 100(ac + b) + b^2$
ここで，b^2 は最大 2 桁であることに注意しておく．

(6) $0 \leqq b \leqq 99$，$0 \leqq c \leqq 99$，$b + c = 100$ とする．
$(100a + b)(100a + c)$
$= (100a)^2 + (b + c) \times 100a + bc$
$= 10000a^2 + 100 \times 100a + bc$
$= 10000a(a + 1) + bc$
ここで，bc は最大 4 桁であることに注意しておく．

(7) $10 \leqq a \leqq 99$，$10 \leqq c \leqq 99$，$a + c = 100$，$0 \leqq b \leqq 9$ とする．
$(10a + b)(10c + b)$
$= 10a \times 10c + 10a \times b + b \times 10c + b^2$
$= 100ac + 10(a + c)b + b^2$
$= 100ac + 10 \times 100 \times b + b^2$
$= 100(ac + 10b) + b^2$
ここで，b^2 は最大 2 桁であることに注意しておく．

(8) $1 \leqq a \leqq 9$，$1 \leqq c \leqq 9$，$a + c = 10$，$0 \leqq b \leqq 99$ とする．
$(100a + b)(100c + b)$
$= 100a \times 100c + 100a \times b + b \times 100c + b^2$
$= 10000ac + 100(a + c)b + b^2$
$= 10000ac + 100 \times 10 \times b + b^2$
$= 1000(10ac + b) + b^2$
ここで，b^2 は最大 4 桁なので，和をとったときに，千の位で重複がある可能性もある． □

最後に，正方形の面積の計算をはじめ，使う機会が多い平方数の速算術を考えてみよう．

問 5． 81, 82, $\cdots$, 90 の平方数をできるだけ速く計算せよ．また，速く計算するために，どのような工夫をしたか述べよ．

解

一般に $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$，すなわち，

$$a^2 = (a + b)(a - b) + b^2 \qquad \cdots ①$$

が成立する．特に $a = x + 1$，$b = x$ とおくと，

$$(x + 1)^2 = (x + 1 + x)(x + 1 - x) + x^2 \quad \text{より}$$
$$(x + 1)^2 = x^2 + \underline{x + (x + 1)} \qquad \cdots ②$$

が成立する．つまり，$(x + 1)^2$ は，x^2 に $\underline{x + (x + 1)}$ を足すことによって得られる．

$$x^2 \xrightarrow{+x + (x + 1)} (x + 1)^2$$

最初の平方数である 81^2 を計算するために，①で $a = 81$，$b = 19$ とおくと，

$$81^2 = (81 + 19)(81 - 19) + 19^2 \qquad \cdots (*)$$
$$= 100 \times 62 + 361 = 6561$$

であり，②で $x = 81$ とおくと，

$$82^2 = (81 + 1)^2 = 81^2 + 81 + 82$$
$$= 6561 + 163 = 6724$$

を得る．さらに，②で $x = 82$ とおき，

$$83^2 = 82^2 + 82 + 83$$

のように，繰り返し同様に計算していけば，求める平方数は，順に

6561，6724，6889，7056，7225，
7396，7569，7744，7921，8100

である． □

ちなみに，$(*)$ において，$b = 1$ とすれば，

$$81^2 = (81 + 1)(81 - 1) + 1^2$$
$$= 82 \times 80 + 1 = 6560 + 1 = 6561,$$

$b = 9$ とすれば，

$$81^2 = (81 + 9)(81 - 9) + 9^2$$
$$= 90 \times 72 + 81 = 6480 + 81 = 6561$$

であり，b をどのような値にしても，同様の結果を得る．また，次の性質

$$\overset{+2}{}$$
$$x^2 \xrightarrow{+x + (x + 1)} (x + 1)^2 \xrightarrow{+(x + 1) + (x + 2)} (x + 2)^2$$

を利用した解答や，単純に

$$(100 - a)^2 = 10000 - 200a + a^2$$

を適用した解答もあった．

(2015 年　須田)

A 1-4.　生徒の課題発見能力を育む教材としてのオイラー関数

関連分野：合同式 高等数学：初等整数論 対象学年：高校 1 年生 単元：整数の性質 教材名：オイラー関数で遊ぼう

0.1　オイラーの φ 関数

定義：自然数 m に対し、m と互いに素な m 以下の自然数の個数を $\varphi(m)$ とする。

具体例で確認してみよう。$\varphi(6)$ は、6 以下の自然数で 6 と互いに素なものは $1, 5$ の 2 個なので、$\varphi(6) = 2$ である。また、素数は 1 と自分自身しか約数を持たないという定義からただちに、p が素数とすると $\varphi(p) = p - 1$ が成り立つ。逆に、自然数 n が $\varphi(n) = n - 1$ を満たすとすると、n は素数である。

素数分布を研究していたオイラーが定義した関数で、今日までさまざまな研究がなされてきた関数であるが、オイラー関数は分かっていないことの方が多い。たとえば、$\varphi(3) = 2, \varphi(6) = 2$ のように、オイラー関数の値に 2 を持つような自然数は少なくとも 2 個以上は存在する。オイラー関数の具体的な値を計算してみると、必ず値が重複しているように観察される。すなわちオイラー関数の逆関数は多価関数であることが観察されるが、これは未解決問題なのである。分かっていないことが多いということは、それだけ「さまざまなことがらに潜む仕組みや法則を数理的な解析によって解き明かそう」という本校数学科の目標を達成するためにふさわしい教材になりうる。特に、オイラー関数はその定義が非常にシンプルで、表にして眺め、自分なりの規則性を発見して証明することができれば、それは生徒の定理となる。

$\boxed{\text{性質}}$

- p が素数のとき、$\varphi(p) = p - 1$
- m を非負整数、p が素数のとき $\varphi(p^m) = p^{m-1}(p-1)$
- m, n を互いに素な 2 つの非負整数とすると き、$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$

証明は本校開発教材集 A1-3 で丁寧に分かりやすく書かれているので、そちらを参照されたい。ここでは、厳密な議論はせず、オイラー関数の見方を述べる。まず非負整数 n が、

$$n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} \dots p_k^{m_k}$$

と素因数分解されたとする。$\varphi(n)$ の値を求めるために最も基本的な方法、$1, 2, 3, \dots$ と数えて n に至るまで、n と互いに素でないものを数えるやり方について考察する。簡単のため、上記の素因数分解は、素因数が小さい順に並んでいると仮定する。まず、n に至るまでに 1 つ目の素因数 p_1 と互いに素となる数の割合は、p_1 の倍数だけが除かれるので、

$$\frac{p_1 - 1}{p_1}$$

である。そのあと、p_2 の倍数が除かれるので、n に至るまで p_1, p_2 と互いに素となる数の割合は、

$$\frac{p_1 - 1}{p_1} \frac{p_2 - 1}{p_2}$$

となる。この考察を繰り返すと、n に至るまですべての素因子 $p_1, p_2, \dots, p_k$ と互いに素となる数の割合は、

$$\frac{p_1 - 1}{p_1} \frac{p_2 - 1}{p_2} \quad \dots \frac{p_k - 1}{p_k}$$

となるので、元の数 n にこの割合を表す分数を乗ずることで $\varphi(n)$ の値が求まる、といった考え方である。（厳密に証明するためには、中国式剰余定理が必要）　実際、

$$\varphi(n) = n \frac{p_1 - 1}{p_1} \frac{p_2 - 1}{p_2} \quad \dots \frac{p_k - 1}{p_k}$$

$$= p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k} \frac{p_1 - 1}{p_1} \frac{p_2 - 1}{p_2} \quad \dots \frac{p_k - 1}{p_k}$$

$$= p_1^{m_1 - 1} p_2^{m_2 - 1} \dots p_k^{m_k - 1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1)$$

$$= \prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i-1}(p_i - 1)$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \varphi(p_i^{m_i})$$

この結果からも、オイラー関数は相異なる素因数に対して乗法的であることが分かる。さて、先ほどの計算で出てきた、

$$\varphi(n) = n\frac{p_1 - 1}{p_1}\frac{p_2 - 1}{p_2} \quad \ldots \frac{p_k - 1}{p_k}$$

は素因数分解さえできればオイラー関数の値を簡単に求めるための公式でもある。非負整数 n が、

$$n = p_1^{m_1}p_2^{m_2}p_3^{m_3}\ldots p_k^{m_k}$$

と素因数分解されたとき、先ほどの式を整理した式

$$\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})\ldots(1 - \frac{1}{p_k})$$

で与えられる。この公式に従えば、$100 = 2^2 \times 5^2$ であるから、

$$\varphi(100) = 100(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{5}) = 40$$

と簡単に計算することができるようになる。さて、オイラー関数が応用上重要な意味を持つ理由の 1 つには、フェルマーの小定理の拡張がある。

> 定理： 非負整数 a, m が互いに素であるとき、$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$ が成立する。

さまざまな証明が知られているが、シンプルな議論で済むものを与えておこう。
m 以下の自然数で m と互いに素であるようなものを、

$$x_1, x_2, \ldots, x_{\varphi(m)}$$

とおく。これらすべてに m と互いに素な自然数 a をかける。

$$ax_1, ax_2, \ldots, ax_{\varphi(m)}$$

ここで、a と m が互いに素であることから、m で割った余りは、最初の

$$x_1, x_2, \ldots, x_{\varphi(m)}$$

の数と同じものになる。このことについて、具体例で確認してから、証明をする。たとえば $m = 7$ と $a = 9$ は互いに素である。7 と互いに素な数は、

$$1, 2, 3, 4, 5, 6$$

で、これらをすべて 9 倍すると、

$$9, 18, 27, 36, 45, 54$$

となるが、これらをすべて 7 で割った余りは、

$$2, 4, 6, 1, 3, 5$$

であり、最初の集合と同じものになる。さて一般に、m と互いに素な m 以下の相異なる任意の 2 つの数 t_i, t_j について、m と互いに素な a をかけることで、at_i, at_j という 2 つの数をつくり、これらを m で割った余りが等しくなったとする。すなわち、

$$at_i \equiv at_j \pmod m$$

であるとする。$(a, m) = 1$ であることから両辺を a で割れて、$t_i \equiv t_j$ となるが、そもそも $t_i - t_j < m$ より、これは不可能である。(c.f. 完全剰余系)
さて、オイラーの定理の証明に戻ると、m と互いに素な数たちをすべてかけあわせたものを m を法として考察する。

$$x_1x_2\ldots x_{\varphi(m)} \equiv a^{\varphi(m)}x_1x_2\ldots x_{\varphi(m)} \pmod m$$

各 x_i たちは m とは互いに素であるので、それらの積も m とは互いに素である。したがって両辺を $x_1x_2\ldots x_{\varphi(m)}$ で割れば、オイラーの定理を得る。

0.2 オイラー関数の値を観察する

準備が長くなってしまったが、本題はオイラー関数の値について、色々と観察していくことにある。1 から 100 くらいまでの自然数を考え、自然数とオイラー関数の値を並べてみる。オイラー関数の値を実際に計算練習することも大切である。実際に計算して表にしたものが次のものである。気が付くことは何かあるだろうか。この

表を生徒に提示し、何か気が付くことはないかと発問してみると、純粋で素朴な発見をしてくれるはずである。その発見は、数学的に価値があるものかもしれないし、そうでなかったとしても、教育的にはとても大きな価値のある発見であると考えている。

n	$\varphi(n)$		n	$\varphi(n)$
2	1		2	1
3	2		3	2
4	2		4	2
5	4		6	2
6	2		5	4
7	6		8	4
8	4		10	4
9	6		12	4
10	4		7	6
11	10		9	6
12	4		14	6
13	12		18	6
14	6		15	8
15	8		16	8
16	8		20	8
17	16		24	8
18	6		11	10
19	18		22	10
20	8		30	10
21	12		13	12
22	10		21	12
23	22		26	12
24	8		28	12
25	20		36	12
26	12		17	16
27	18		32	16
28	12		34	16
29	28		19	18
30	10		27	18
31	30		38	18
32	16		25	20
33	20		33	20
34	16		23	22
35	24		35	24
36	12		29	28
37	36		31	30

0.3 予想される観察

観察 1 ：$\varphi(2) = 1$ 以外全部偶数である。

よく知られたオイラー関数ゆえに、これは当たり前すぎるのかもしれないが、定理の発見はこうした素朴な観察から始まることが多い。生徒が観察したことに対してきちんと証明をつけるよう指導することは肝要である。実際、n が、$n = p_1^{m_1}p_2^{m_2}p_3^{m_3}\dots p_k^{m_k}$ と素因数分解されたとすると、オイラー関数の乗法性により、

$\varphi(n) = \varphi(p_1^{m_1})\varphi(p_2^{m_2})\dots\varphi(p_k^{m_k})$ である。素数 p に対して $\varphi(p^m) = p^{m-1}(p-1)$ という性質を持つことから、p が 2 でなければ p は奇素数であるので、$p-1$ は偶数である。したがって、$\varphi(n)$ の右辺のどこかには偶数があるので、$\varphi(n)$ は偶数となる。

観察 2 ： 単調ではないが、m が大きければ $\varphi(m)$ も大きくなる。

高校 1 年では極限の概念はまだ学習していないが、極限の言葉で言い換えると $\lim_{m\to\infty}\varphi(m)$ は発散する、ということである。
m 以下の素数の個数を $p(m)$ とおくと、m 以下の素数は少なくとも m とは互いに素なので、$p(m) \leq \varphi(m)$ が成立する。素数は無限に存在するので、オイラー関数の値も無限に大きくなる。

観察 3 ： 偶数の値で存在しないものがある。

自然数に対してオイラー関数の値を順番で並べ替えて観察してみると、

$$14, 26, 34\dots$$

などは、オイラー関数の値として登場しないことが観察できる。素因数分解してみると、$2\times p$ (p : 奇素数) の形の数はオイラー関数の値にならないのではないかと思えるが、$\varphi(11) = 10 = 2\times 5$ なので、この予想はすぐに崩れる。11 がだめなのではなく、奇素数はだいたいダメっぽいことも観察できる。「だいたい」は数学的ではないが、定理を作る過程であったり、条件付けを調

べるためには重要な感性で、未知の数学を進めるためには「なんか、そんな気がする」が第一歩であることが多い。そこで、p を奇素数として、ある自然数 n について

$$\varphi(n) = 2p$$

となったと仮定する。n が少なくとも 2 つ以上の奇数の素因数を持つとき、オイラー関数の乗法性により観察 2 と同様の議論で、値は 4 の倍数になることが分かるので、そうした n はすぐに除外できる。したがって上のようになったとすると、ひとつの奇素数 q を用いて、$n = 2^m q^k$ であることが分かる。この n に対してオイラー関数を作用させた値が $2p$ となるので、

$$2^{m-1} q^{k-1}(q-1) = 2p$$

という関係式ができる。$m = 2$ のときは、p が奇素数であることから、$q^{k-1}(q-1) = p$ とはなり得ないため、ただちに $m = 1$ であることが分かり、

$$q^{k-1}(q-1) = 2p$$

となる。あとは積の場合分けで議論する。
(1) $q^{k-1}(q-1) = 1 \times 2p$ のとき
$q^{(k-1)} = 1$ より $k = 1$、かつ $q - 1 = 2p$ となる。つまり $q = 2p + 1$ である。p, q は奇素数であったので、対偶命題を取ることにより、次の定理のようなものを得る。

奇素数 p に対して $2p + 1$ が素数でないならば $\varphi(n) = 2p$ となる自然数は存在しない。

(2) $q^{k-1} = p,\ q - 1 = 2$ のとき
ただちに $p = q = 3, k = 2$ が導かれる。これは他ならぬ $\varphi(9) = 6$ ということである。その他の場合もあるが、p, q の奇素数性にかなり制限され、結局 (1) のみが有効な主張なのではないかと考えられる。

0.4 おわりに

先の考察で、14 や 26 がオイラー関数の値にならないことは示せたが、オイラー関数の値にならないすべての偶数を網羅したわけではない。調べてみると、たとえば 50 はオイラー関数の値にはならないのであるが、さらなる特徴づけが必要であろう。また、素朴な観察の 1 つに

オイラー関数は必ず重複した値を持つ

ことも観察される。言い換えると、オイラー関数の逆関数が多価関数であるということだが、この問題はどうやら未解決問題で、2015 年現在、$10^{10^{10}}$ までは正しいことが示されている。オイラー関数は近年セキュリティ技術への応用もあり、ますます重要性を増してきている。そして、分かっていないことが多いからこそ、教材としてのオイラー関数の重要性を感じていただけたなら幸いである。

[参考文献]
A1-3 更科元子 高校における整数論の指導について (筑波大学附属駒場中・高等学校 数学科開発教材集)

(2015 吉崎)

A2-3. 斜交座標の薦め

関連分野：空間図形、ベクトル 高等数学：代数学、幾何学 対象学年：中学３年生、高校１，２年生 関連単元：ベクトル 教 材 名：ベクトルの応用

≪斜交座標の薦め≫

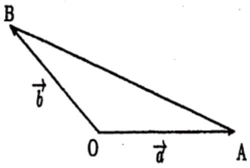
東京理科大学数学教育研究所が実施している『理数系高校生のための数学基礎学力調査』に、次の問題がある。

問題１．

△OAB において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とします。
実数 x，y が，

$$0 \leqq x+y \leqq 1,\ 0 \leqq x,\ 0 \leqq y$$

の範囲を動くとき，$\overrightarrow{OP}=x\vec{a}+y(\vec{a}+\vec{b})$ を満たす点 P の存在する範囲を図示しなさい。



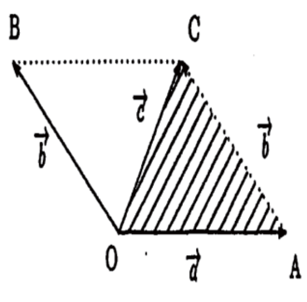
解答例

11. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ とおくと，

$$\overrightarrow{OP}=x\vec{a}+y\vec{c}=(x+y)\cdot\frac{x\vec{a}+y\vec{c}}{x+y}$$

であり，$x=y=0$ のときは，点 O と点 P は一致する．それ以外のときは，ベクトル $\dfrac{x\vec{a}+y\vec{c}}{x+y}$ は，線分 AC 上の内分点である．

それの実数 $(x+y)$ 倍で，$0 \leqq x+y \leqq 1$ だから，点 P の存在する範囲は，右図の通りである．

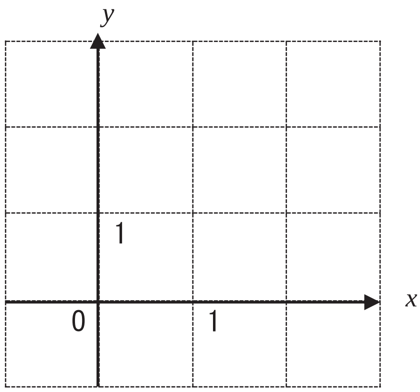


2014 年の調査結果によると正答率は 20%程度であった。内積などの応用のため直交座標での成分表示は十分に指導されるが、この様な図形への応用については理解が不十分であることが窺われる。しかし本問は本質的に次と同じあることを考えると、正答が大変少ない。

問題１’

次の不等式が表す領域を図示せよ。

$0 \leqq x+y \leqq 1$ 、$0 \leqq x$ 、$0 \leqq y$



一般に座標軸は直交している方が考え易いが、図形によっては処理しにくい場合がある。そのようなときにベクトルが有効になる。独立した２つのベクトルで他のすべてが表せることは、図形への応用場面で重要なことであり、もちろんこの２つのベクトルは直交していない方が普通である。

行列を用いた１次変換が高等学校で扱われなくなったため、生徒達が斜交座標を考える場面が大変少なくなった。特段に難しいことではないので、ベクトルの指導の初期の段階から斜交座標を扱い、その活用を図るとともに、ベクトルの図形への応用力を培いたい。

以下、初めに斜交座標の活用例を示した後、斜交座標を含めたベクトルの指導の流れを記す。

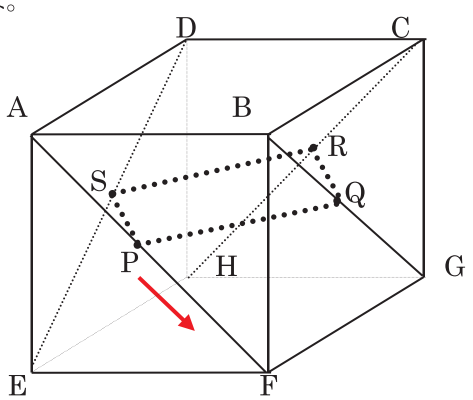
A2-3.1. 斜交座標の活用例

次の問題は、放物線で囲まれる面積（教材 d3-4 参照)、カバリエリの原理の利用（教材 d3-2 面積・体積参照）を扱った後、本校中学 3 年生が取り組んだ問題である。

問題 2.

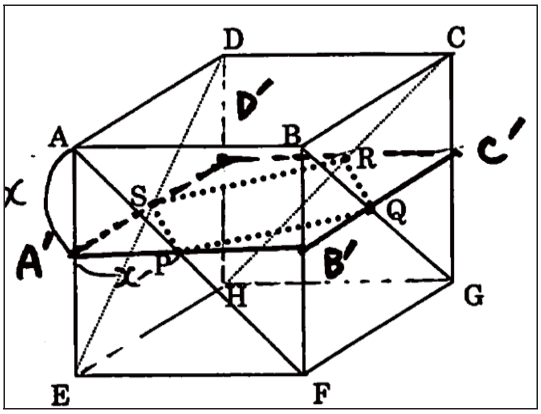
一辺の長さ２の立方体 ABCD-EFGH がある。点 P は側面の対角線 AF 上を A から F まで動き、同様に点 Q,R,S も側面の対角線 BG,CH,DE 上をそれぞれ動く。

４点 P,Q,R,S が同時に動き始め、同じ速さで進むとき、四角形 PQRS が通過して出来る立体の体積を求めよ。



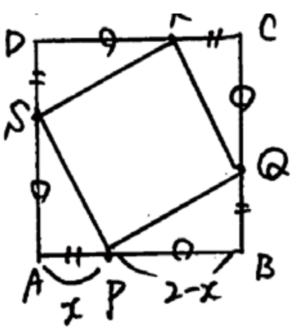
辺 AE を軸とし、これに垂直な平面で切断して考える者も多いが、P の動きの通りに対角線 AF を軸と考える者もいる。このとき切断面と軸は直交していない。以下直交座標である前者の解答例を先に記し、その後に斜交座標となる後者の解答例を記す。

直交軸による解答例



図のように面 ABCD に平行で四角形 PQRS を含む正方形を A'B'C'D'とし、AA'$=x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ とすると、A'P$=x$、PB'$=2-x$ である。

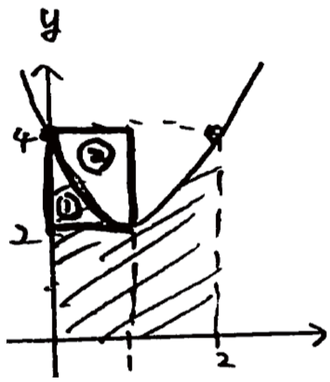
右は上から見た図。



四角形 PQRS は正方形であり、その面積を y とすると、

$$y=\left(\sqrt{x^2+(2-x)^2}\right)^2$$
$$=2x^2-4x+4$$
$$=2(x-1)^2+2$$

求める体積 V は右図の斜線部の面積の値に等しく（図の太線の部分の面積比が１：２であるから）、



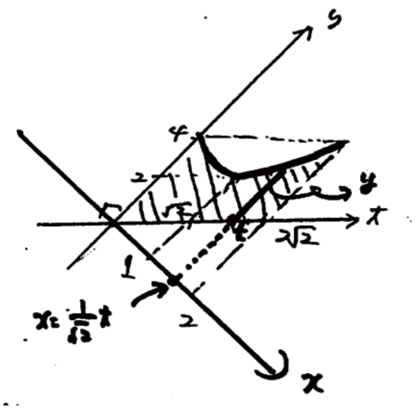
$$V=4+(2\times\frac{1}{3})\times 2=\frac{16}{3}$$

斜交軸による解答例

AP$=t$ $(0 \leqq t \leqq 2\sqrt{2})$ として、正方形PQRSの面積 y を t で表すと、

$$y=4-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}t\times(2-\frac{1}{\sqrt{2}}t)\times 4$$
$$=4-2\sqrt{2}+t^2$$
$$=(t-\sqrt{2})^2+2 \quad \cdots ①$$

正方形 PQRS と PA の作る角は 45° なので、グラフは下のようになる。

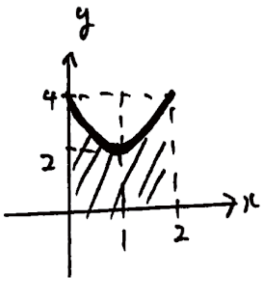


図のように y 軸に垂直に x 軸をとり、斜線部を細分して平行移動し、x 軸上に落とした時のグラフは、

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}t$ より、$t=\sqrt{2}\,x$ を①に代入して、

$y=(t-\sqrt{2})^2+2$
$=(\sqrt{2}\,x-\sqrt{2})^2+2$
$=2(x-1)^2+2$

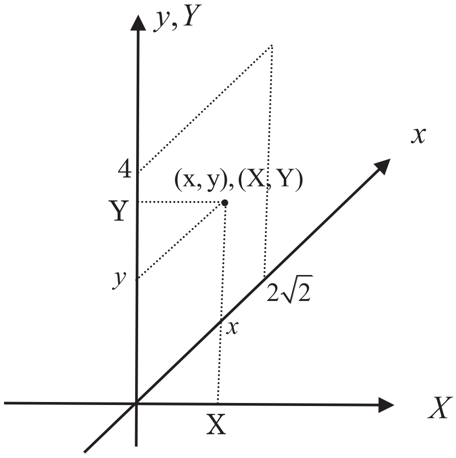
したがって、求める立体の体積Vは



$$\mathrm{V}=4+2\times\frac{1}{3}\times2=\frac{16}{3}$$

斜交軸の練習として、次のような問題を取り上げる。

問題3.



上図は、x 軸と y 軸の作る角が 45° の斜交座標で

$y=x^2-2\sqrt{2}\,x+4$ …＊ のグラフを書いたものである。図のように y 軸に直交する X 軸をとり、y 軸を Y 軸とするとき、このグラフを直交座標 (X,Y) で表す式を求めよ。

解答例

曲線＊上の点を $(x,y)\Leftrightarrow(X,Y)$ とすると、図より、

$$X=\frac{1}{\sqrt{2}}x,\ \ Y=y+\frac{1}{\sqrt{2}}x=y+X$$

これより、$x=\sqrt{2}X,\ \ y=-X+Y$

＊に代入して、

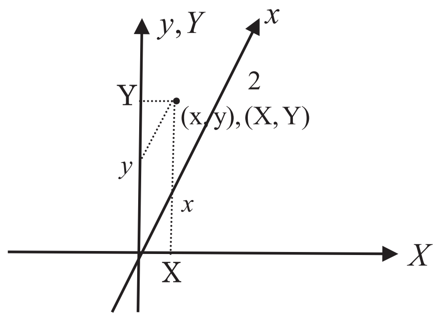
$-X+Y=(\sqrt{2}X)^2-2\sqrt{2}\times\sqrt{2}X+4$

$\therefore\ Y=2X^2-3X+4$

問題4.

下図は、x 軸と y 軸の作る角が 30° の斜交座標 (x,y) で $y=-x^2+2x$ のグラフを書いたものである。

このグラフを、図の直交座標 (X,Y) で表す式を求めよ。



解答例

グラフ上の点を $(x,y)\Leftrightarrow(X,Y)$ とすると、

$$X=\frac{1}{2}x,\ \ Y=y+\frac{\sqrt{3}}{2}x=y+\sqrt{3}X$$

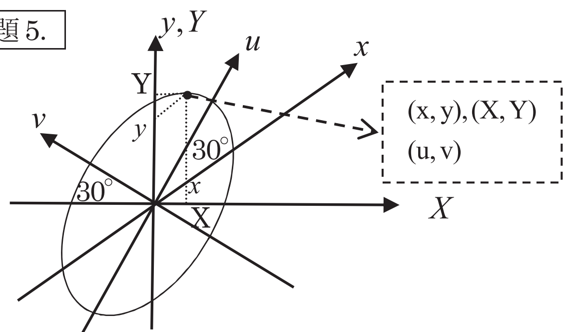
これより、$x=2X,\ \ y=-\sqrt{3}X+Y$

与式に代入して、

$-\sqrt{3}X+Y=-4X^2+4X$

$\therefore\ Y=-4X^2+(4+\sqrt{3})X$

問題5.



上図は、x 軸と y 軸の作る角が 60° の斜交座標 (x,y) で円 $x^2+y^2=2$ のグラフを書いたものである。

このグラフを、図の直交座標 (X,Y) で表す式を求めよ。

また、図の直交座標 (u,v) で表すとどうなるか。

$\boxed{\text{解答例}}$

円上の点を$(x,y)\Leftrightarrow(X,Y)$　とすると、

$$X=\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ \ Y=y+\frac{1}{2}x=y+\frac{1}{\sqrt{3}}X$$

これより、$x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}X,\ \ y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}X+Y$

円の式に代入して、

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}X+Y\right)^2=2$$

$$\frac{4}{3}X^2+\frac{1}{3}X^2-\frac{2}{\sqrt{3}}XY+Y^2=2$$

$$\therefore\frac{5}{3}X^2-\frac{2}{\sqrt{3}}XY+Y^2=2$$

また、$(x,y)\Leftrightarrow(u,v)$　とすると、

$$(x,0)\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x,-\frac{1}{2}y\right)$$

$(0,y)\Leftrightarrow\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}y,\dfrac{1}{2}y\right)$　であるから、

$$\begin{cases}u=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y\iff x+y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}u\\ v=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y\iff -x+y=2v\end{cases}$$

これより、

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}}u-v,\ \ y=\frac{1}{\sqrt{3}}u+v$$

円の式に代入して

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u-v\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}u+v\right)^2=2$$

展開して整理すると、$\dfrac{2}{3}u^2+v^2=1$

A2-3.2. 斜交座標を含めたベクトルの指導

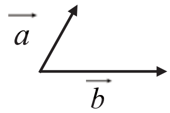
まず、和、差、実数倍について、次のように、通常通り指導する。（解答例は省略）

＜ベクトルとその演算＞

問1．図の$\vec{a},\vec{b}$について、次のベクトルを図示せよ。

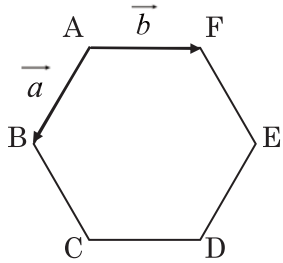
①$\vec{a}+\vec{b}$　②$\vec{a}-\vec{b}$

③$2\vec{a}-3\vec{b}$



問2．正6角形ABCDEFで、

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$とするとき、次のベクトルを$\vec{a},\vec{b}$で表せ。



①$\overrightarrow{EB}$　②$\overrightarrow{BC}$

③$\overrightarrow{BF}$　④$\overrightarrow{DF}$

問3．次の等式が成り立つことを示せ。

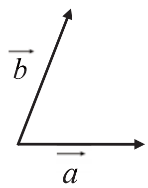
①　$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

②　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

問4．図の$\vec{a},\vec{b}$について、次の$\vec{x}$を図示せよ。

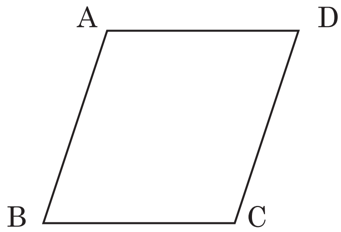
①$\vec{x}=2(-\vec{a}+3\vec{b})+4(\vec{a}-\vec{b})$

②$2(3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{x})=5(\vec{a}+\vec{b})$



問5．平面上の4点A、B、C、Dは、どの3点も同一直線上にないものとする。

このとき、$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AD}$が成り立つことは、四角形ABCDが平行四辺形であるための必要十分条件であることを示せ。



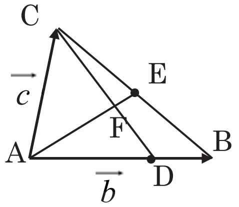
問6．△ABC で、辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D、辺 BC の中点を E とし、AE と CD の交点を F とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき、

次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

①$\overrightarrow{CD}$

②$\overrightarrow{AE}$

③$\overrightarrow{AF}$



続いて、ベクトルの性質として、次の様な問題を扱う。問８が斜交座標に関わるものであるが、生徒達は違和感なく図示する。

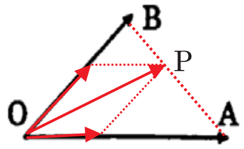
<ベクトルの性質>

問7．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。点 P,Q が次の時、

$\overrightarrow{OP}$,$\overrightarrow{OQ}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ の式で表せ。

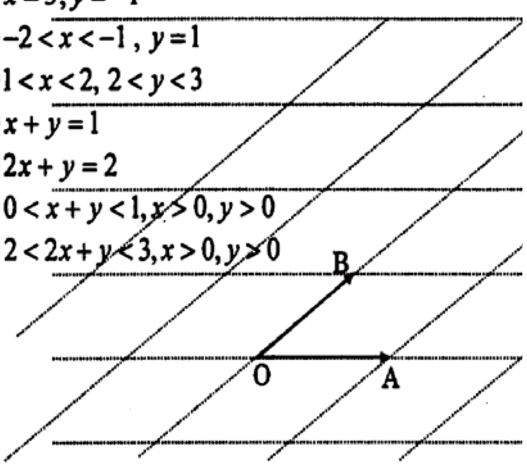
① 線分 AB 上にあり、
AP : PB＝3 : 2
である点 P

② 線分 AB の延長線上にあり、
AQ : QB＝3 : 2 である点 Q



問8．$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ とする。x, y が次のとき、点 P が存在する範囲をそれぞれ図示せよ。

①$x=3, y=-1$
②$-2<x<-1, y=1$
③$1<x<2, 2<y<3$
④$x+y=1$
⑤$2x+y=2$
⑥$0<x+y<1, x>0, y>0$
⑦$2<2x+y<3, x>0, y>0$



問9．△OAB において、$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。実数 x, y が、$0\leqq x+y\leqq 1$、$0\leqq x$、$0\leqq y$ の範囲を動くとき、
次の各式を満たす点 P の存在する範囲をそれぞれ図示せよ。

① $\overrightarrow{OP}=x\vec{a}+y(\vec{a}+\vec{b})$

② $\overrightarrow{OP}=(2x+y)\vec{a}+(x-y)\vec{b}$

問 10．△ABC と正の定数 r, s, t に対して、次の式を満たす点 P は△ABC の内部にあることを示せ。

$r\overrightarrow{AP}+s\overrightarrow{BP}+t\overrightarrow{CP}=\vec{0}$

以下、内積など通常通り指導する。

最後に空間図形への応用問題を記す。

【ベクトルへの応用】

一辺の長さが 1 の正 20 面体の頂点を、図のように、O,A,B,C,D,E,O',A',B',C', D',E' とし、

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，

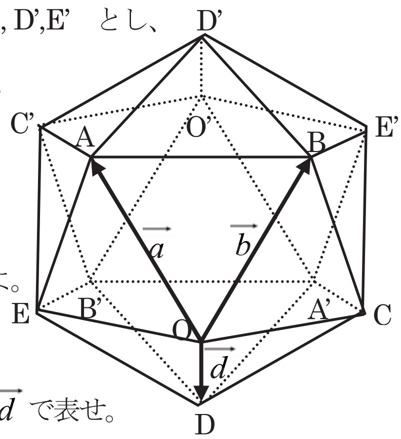
$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とする

次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{d}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OE'}$ を、

それぞれ、$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ で表せ。



(3) この正 20 面体を水平な平面上に、一つの面を下にしておいたときの、高さ h を求めよ。

略解）(1) $\vec{a}\cdot\vec{d}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$

(2) $\overrightarrow{OC}=\vec{b}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\vec{d}-\vec{a}\right)$

$\overrightarrow{OE'}=\vec{d}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{b}$

(3) O から平面 O'A'B'に引いた垂線を OP とすると、

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}$

$=\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{d}-\dfrac{2}{3}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}$

$h=|\overrightarrow{OP}|=\left|\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{d}\right|=\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}$

（2015　鈴木）

A2－4.　漸化式

関連分野	代数分野
高等数学	代数学
対象学年	高校２年生
関連単元	「数列」，「場合の数」
教 材 名	「漸化式」

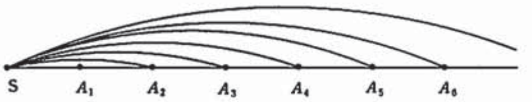
≪漸化式≫

漸化式について学習指導要領では、「漸化式について理解し、それらを事象の考察に活用できるようにする」とある。そこで、経路問題を通して、事象の考察に漸化式の利用が有効であることを理解し、さらに、その活用の幅を広げるため、２次元の漸化式や関数を導入した漸化式などを扱う教材を試みた。

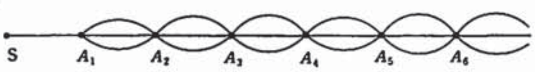
A2－4.1.　経路と漸化式

問１　n は自然数のとき、点Ｓから点 A_n までの扇をたどって進む経路数を n を用いて表せ。ただし、進める経路は常に図の右方向とし、左方向へは進めないものとする。また、経路は右側に続いているものとする。

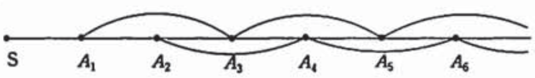
(1)



(2)



(3)



点 A_n までの経路数を a_n 通りとする。このとき、点 A_n に経路が繋がっている点からの関係をそれぞれ表すと、

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+1$

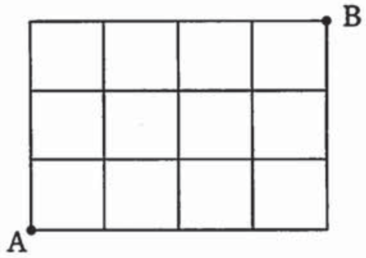
(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n$

(3)　$a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

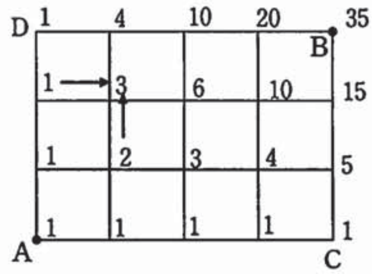
となり、(1)は等差数列、(2)は等比数列、(3)はフィボナッチ数列を表す漸化式となる。これより、各経路数を n を用いて表すことができる。

A2－4.2.　碁盤目状の経路と漸化式

問２　次の図のような碁盤目状の道で、点Ａから点Ｂまで、最短で行く道順は何通りありますか。



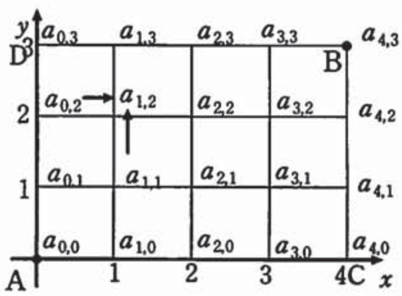
場合の数の組合せの問題として扱われるこの問題は、下のように、図に交差点までの経路数を書き入れていくことで求めることができる。



この経路数の計算方法を、漸化式で表す方法を考える。

問１の直線上に並んだ点と異なり、問２の点は、２次元の碁盤目状の格子点となるため、点を表すため２変数を用いて表示する。その結果、経路数も同様に２変数を用いて表すこととする。なお、格子点のことを今後は交差点ということとする。

そこで、交差点の位置を、点Ａを原点、道ACを x 軸，道ADを y 軸，１ブロックを単位１とすると、点を示す座標のように交差点を表記することとして、各交差点までの経路数を $a_{x,y}$ 通りとすると、下の図のように表示できる。



経路数の計算方法を、漸化式を用いて表すと、次のようになる。

$$
\begin{cases}
a_{0,0}=1 \\
x=0\text{のとき、}a_{0,y}=1 \qquad (1\leqq y\leqq 3) \\
y=0\text{のとき、}a_{x,0}=1 \qquad (1\leqq x\leqq 4) \\
x>0,y>0\text{のとき、}\quad a_{x,y}=a_{x-1,y}+a_{x,y-1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (1\leqq x\leqq 4,\ 1\leqq y\leqq 3)
\end{cases}
$$

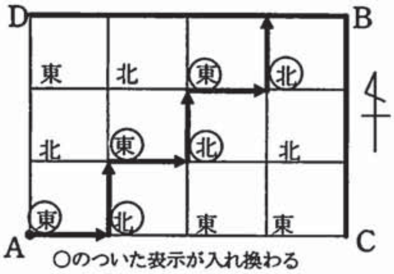
A2−4.3. 条件のついた碁盤目状の経路と漸化式

経路問題に条件をつけることで、漸化式で表すために工夫が必要となる場合である。なお、この問題に生徒はとても集中して取り組んでいた。

問３　東西方向に走る４本の道と南北方向に走る５本の道が碁盤目状になった道がある。このような道を、100回、点Ａから出発して、道BCまたは道BDまでに到達するまでの経路について考える。ただし、この道の各交差点には、進む方向を示す標識が立っており、標識には、「北」と「東」のいずれかが表示され、通過すると入れ換わるようになっている。例えば、始めの標識が図１の場合、３回目までの経路はそれぞれ図2〜4のようになる。このとき、100回目の経路を示せ。

図１　始めの標識

図２　１回目の経路



○のついた表示が入れ換わる

図３　２回目の経路

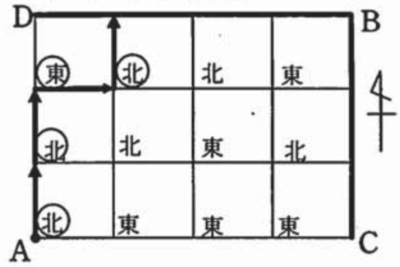
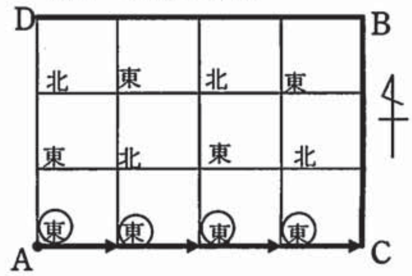


図４　３回目の経路

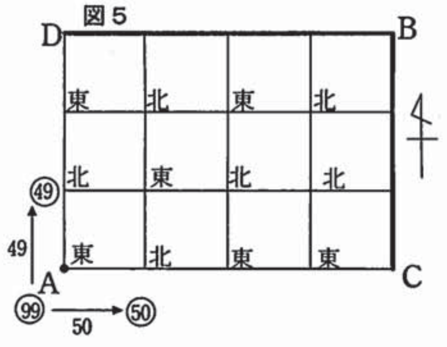


この解法のポイントは、99回目までに、各交差点を何回通過したかが分かれば、100回目の標識の表示が「北」か「東」かが分かることである。

まず、具体的に考えてみる。

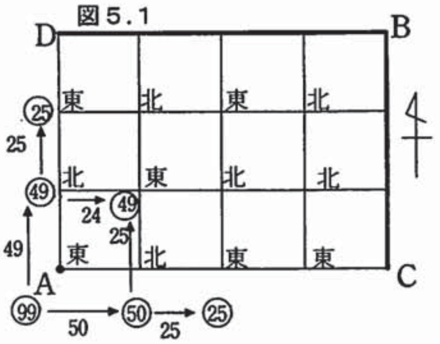
スタート地点の点Ａは、99回通過し、始めが「東」であるから、図５のように、99回中50回が「東」、49回が「北」に向かって進む。よって、99回目は「東」に向かって進むので、100回目の標識は、「北」が表示されることが分かる。

図５

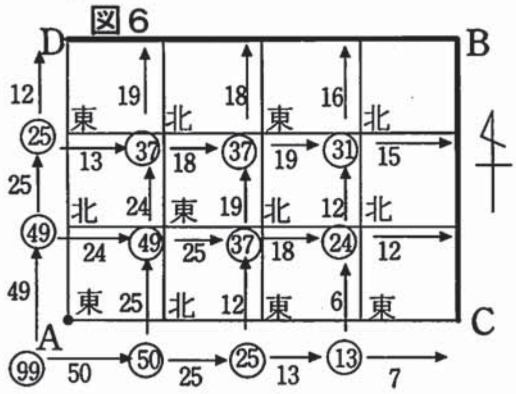


(○数字が交差点の通過する回数)

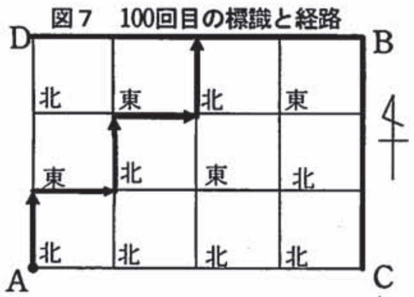
すると、次の交差点の通過する回数が分かり、図5.1のように、また、その次の交差点の通過する回数が分かる。



これを繰り返すことによって、99回の経路で、各交差点の通過する回数が調べると、次の図6のようになる。



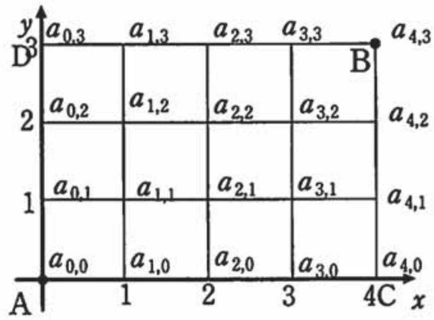
その結果、図7が100回目の経路を示す標識と経路である。



では、この経路を、漸化式で表す方法を考える。

問2と同様に碁盤目状のため、2変数を用いた漸化式で表す。交差点の位置を、点Aを原点、道ACをx軸，道ADをy軸，1ブロックを単位1とみて、点の座標のように表記する。

そして、各交差点の通過する回数を$a_{x,y}$とする。



次に、問2と異なる点は、

<1>標識によって進む方向が決まる。

<2>通過する度に進む方向が入れ替わるため、交差点から次の交差点に進む回数が、交差点を通過する回数の約半分ずつに分かれる。

ことであり、具体例から、通過する回数が偶数回ならば、半分ずつの回数が次の交差点まで進む回数となり、通過する回数が奇数回ならば、始めに標識で示された方向に行く回数がもう一方の方向に行く回数よりも1回多くなることが分かる。

そこで、漸化式を用いて表すために、次の2つの工夫を取り入れる。

始めに各交差点の標識に示された進む方向を$s_{x,y}$と表すものとし、

北のとき　$s_{x,y} = N$

東のとき、$s_{x,y} = E$

とする。

また、通過する回数が奇数回の場合の対応として、次のような関数を定義する。

小数点以下切り上げ関数　$U(X)$

小数点以下切り捨て関数　$D(X)$

この関数によって、例えば、

$$U(3.5) = 4\ , U(4) = 4$$

$$D(3.5) = 3\ , D(4) = 4$$

となる。

すると、各交差点の通過する回数$a_{x,y}$は、次のように漸化式を用いて表すことができる。

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{i)}\ x=0\,,y=0\text{において} \\
\quad a_{0,0}=99 \\
\text{ii)}\ x=0\,,0<y\leq 3\text{において、} \\
\quad s_{0,y-1}=N\text{のとき、}a_{0,y}=U\left(\dfrac{a_{0,y-1}}{2}\right) \\
\quad s_{0,y-1}=E\text{のとき、}a_{0,y}=D\left(\dfrac{a_{0,y-1}}{2}\right) \\
\text{iii)}\ 0<x\leq 4\,,y=0\text{において、} \\
\quad s_{x-1,0}=N\text{のとき、}a_{x,0}=D\left(\dfrac{a_{x-1,0}}{2}\right) \\
\quad s_{x-1,0}=E\text{のとき、}a_{x,0}=U\left(\dfrac{a_{x-1,0}}{2}\right) \\
\text{iv)}\ 0<x\leq 4\,,0<y\leq 3\text{において、} \\
\quad s_{x,y-1}=N\,,s_{x-1,y}=N\text{のとき、} \\
\qquad a_{x,y}=U\left(\dfrac{a_{x,y-1}}{2}\right)+D\left(\dfrac{a_{x-1,y}}{2}\right) \\
\quad s_{x,y-1}=E\,,s_{x-1,y}=E\text{のとき、} \\
\qquad a_{x,y}=D\left(\dfrac{a_{x,y-1}}{2}\right)+U\left(\dfrac{a_{x-1,y}}{2}\right) \\
\quad s_{x,y-1}=N\,,s_{x-1,y}=E\text{のとき、} \\
\qquad a_{x,y}=U\left(\dfrac{a_{x,y-1}}{2}\right)+U\left(\dfrac{a_{x-1,y}}{2}\right) \\
\quad s_{x,y-1}=E\,,s_{x-1,y}=N\text{のとき、} \\
\qquad a_{x,y}=D\left(\dfrac{a_{x,y-1}}{2}\right)+D\left(\dfrac{a_{x-1,y}}{2}\right)
\end{array}
\right.
$$

この漸化式から、各交差点の通過する回数を、簡単な式で表すことはできないが、条件のついた経路問題の事象の考察を十分に行ったと考えられる。

なお、通過する回数が偶数回か奇数回かで漸化式を立てることも可能であり、視点を変えると異なる式もできる。

次は、始めの標識と道の数を変えた類題である。解答は各自で求めてほしい。

問4　問3と同じルールで、始めの標識が図8のとき、1000回目の経路を示せ。

図8　始めの標識

A2−4.4.　今後の展開

漸化式を学習する際、生徒たちは、いろいろな式のパターンから一般項を求めることに時間をかけ、このような事象を考察し数量間の関係や操作を漸化式で表すなど、漸化式の有効性を意識せずに学習を終えてしまうことが多い。そこで、このような問題に取り組み、その中で漸化式の有効性や拡張の可能性を感じてもらえたらと思う。

なお、この教材は、60期卒業生の吉里さんが、本校の教育実習で実践した教材である。彼は、漸化式を自ら立てるという感覚を理解し、それに対して意欲的になってほしいという思いから、このような教材を開発した。さらに、この教材の続きとして、最長部分列問題や最長共通部分文字列問題やナップサック問題なども実践しており、この続編として掲載していきたい。

(2015年　町田)

g3-5. 双心四角形の探究

関連分野 ：幾何分野
高等数学 ：初等幾何
対象学年 ：中学３年生／高校１年生
関連単元 ：円の性質，三平方の定理，
　　　　　 三角比，図形の性質
教 材 名 ：双心四角形の探究

《はじめに》

現在（平成 20 年改訂）の学習指導要領においては，中学３年の幾何分野の学習には相似，円の性質（円周角の定理），三平方の定理が割り当てられている。特に，三平方の定理は，多くの教科書では「中学数学の最終章」として位置づいており，これは，中学校の最後の段階で，代数的分野（２次方程式や平方根）の学習と，幾何的分野の学習との統合を視野に入れた構成であると考えられる。中学３年における幾何分野の授業を構想する際，この視点を大切にしたいと筆者は考えた。

一方，高等学校に目をうつすと，学習指導要領上は数学Ａにおいて図形の性質，数学Ⅰにおいて三角比が扱われており，両者は近接しながらも別々に学習されることが多い。数学Ⅱ・Ｂではベクトルや図形と方程式といった解析幾何的アプローチにも本格的にとりかかることから，これらへの素地を養う教材には需要と可能性があるものと考えられる。

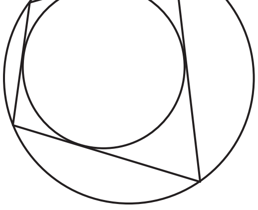
以上のような背景から本稿では，「双心四角形」に焦点をあて，中学３年生を対象にした実践を通して，その教材としての可能性を探ってみたい。

1. 双心四角形の定義

双心四角形は，以下のように定義される。

双心四角形（bicentric quadrilateral）の定義

内接円と外接円をともに持つ四角形を双心四角形という。



一般に三角形であれば，外接円・内接円の両方を必ず持つが，四角形の場合はそうとは限らない。

2. 双心四角形であるための条件

定義をもとに，まずは，四角形が双心四角形であるための条件について考えてみる。これはすなわち，「円に内接する（外接円を持つ）四角形」，「円に外接する（内接円を持つ）四角形」の条件を確認することに他ならない。前者は高校１年の教科書にも取り上げられるほどの知名度があるが，後者はそれに比べると知名度は高くないと思われる。

《四角形が円に内接する（外接円を持つ）条件》

これについては前述のとおり，かなりの知名度があるので，ここでは割愛する。すなわち，「対角の和が 180 度である」ことがその条件である。証明も円周角の定理（あるいはその逆）の発展として，中学でも十分扱うことができるであろう。

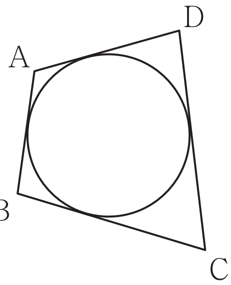
《四角形が円に外接する（内接円を持つ）条件》

一方の内接円を持つ条件については，逆（円に外接する四角形の性質）であれば容易に中学生でも理解することができる。すなわち，「四角形が円に外接しているとき，次が成り立つ」という性質である。

円に外接する四角形の性質

四角形 ABCD が円に外接するとき，次の等式が成り立つ。

AB＋CD＝AD＋BC



（証明）

辺 AB，BC，CD，DA における内接円との接点をそれぞれ P，Q，R，S とおけば，

円外からひいた２本の接線の長さは等しいから，

AP＝AS，BP＝BQ，CR＝CQ，DR＝DS

この４式を辺々加えると，

AP＋BP＋CR＋DR＝AS＋BQ＋CQ＋DS

すなわち，　　AB＋CD＝AD＋BC　　　　　（終）

この証明で用いている「円外からひいた２本の接線の長さは等しい」という性質も，三角形の合同を用いることにより中学生でも証明が可能である。

一方で，この逆，すなわち「AB＋CD＝AD＋BC ならば，四角形 ABCD は内接円を持つ」と言えるだろうか，というのが，多くの生徒にとっては最初の課題となった。この条件は，外接円を持つ条件が対角の和であるのに対し，内接円を持つ条件が対辺の和である（現時点では「……といいな」）という美しさもあるので，生徒にとっては，直観的には正しいのではないかと思

えるものだったようである。

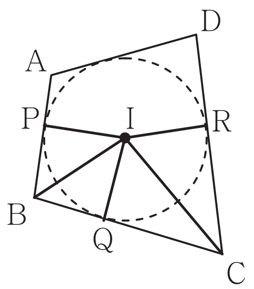
しばらくして，ある生徒が「凹四角形では成り立たないのではないか」という反例（例えば，たこ形の短い2辺を内側に折り返したような四角形）を出したため，条件は修正され，「AB+CD=AD+BC である凸四角形ならば，四角形ABCDは内接円を持つ」となった。（なお，授業後に，「辺の延長も許して『4 直線に接する円が存在する条件』とすれば，凹四角形でも成り立つのではないか」という意見もあった）

このような証明においては，それまでに踏んできた「場数」がものを言うことがあるようで，おそらく五心の存在証明などで経験を積んでいる生徒から「4 辺のうち3辺に接する円は必ずかけるから，その円が4つめの辺に接することを示せばよい」という意見が出る。それをもとに構成された証明が次のようなものである。

四角形が円に外接する条件

すべての角が180度未満である四角形ABCDが，次の等式を満たすとき，四角形ABCDは円に外接する。

AB+CD=AD+BC



（証明）

∠Bの二等分線と，∠Cの二等分線の交点をIとし，Iから3辺AB，BC，CDにそれぞれ垂線IP，IQ，IRをおろす。このとき，

△IPB≡△IQBであるから，BP=BQ，IP=IQ

△IQC≡△IRCであるから，CQ=CR，IQ=IR

よって，IP=IQ=IR　…①

ここで，AB+CD=AD+BCであるから，辺AD上にAP=ASとなる点Sをとると，点SはDS=DRを満たす。この点Sが点Iから辺ADに下ろした垂線の足であることを示せばよい。

いま，点Iから辺ADに下ろした垂線の足をS′とする。もしSとS′が一致しないとすれば，AS＞AS′またはAS＜AS′のどちらか一方が成り立つ。

仮にAS＞AS′とする。

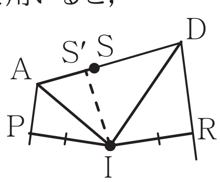
△IAS′と△IAPで三平方の定理を用いると，

$AS'^2+IS'^2=IA^2$，

$AP^2+IP^2=IA^2$

$AS'<AS=AP$であるから，

$IS'<IP$　…②



同様に△IDS′と△IDRで三平方の定理を用いると，

$DS'^2+IS'^2=ID^2$，$DR^2+IR^2=ID^2$

DS′＞DS=DRであるから，IS′＞IR　…③

ところが，①よりIP=IRであるから，②と③はたがいに矛盾している。これはAS＜AS′でも同様。したがって，AS=AS′でなければならず，SとS′は一致する。また②③の式が得られた議論から，SとS′が一致しているならばIP=IQ=IR=ISが成り立つから，この長さを半径とし，Iを中心とする円が四角形ABCDに内接することが示された。（終）

ここでは出来る限り厳密に記述したつもりであるが，実際の授業では，生徒が「垂線の足がずれると，どちらかが長くなってバランスがくずれるから，おかしい」といった独特な言い回しでクラス全体に説明しようとしていたことを付け加えておきたい。

また，この証明は，見方を変えれば，IからADに下ろした垂線の足をS′とするとき，AI，AD，IDの長さが既知の状態であるから，「3辺の長さが既知である三角形において，垂線の長さを求める典型問題」の考えが使えるとも考えられる。すなわち，文字でおいて1次方程式の処理をすることによりAS′=ASを導ける。具体的には，次のようになる。

IP=IR=r，AP=a，DR=d，AS′=xとおくと，AD=$a+d$であるから，

$$IS'^2=(a^2+r^2)-x^2$$
$$=(d^2+r^2)-(a+d-x)^2$$

この式はxの1次方程式であり，解けば

$$(a^2+r^2)-x^2=(d^2+r^2)-(a+d-x)^2$$
$$a^2=d^2-(a+d)^2+2(a+d)x$$
$$a^2-d^2+(a+d)^2=2(a+d)x$$
$$2a^2+2ad=2(a+d)x$$
$$a=x$$

となって，AS′=ASを得る。

ここまでの議論により，双心四角形とは，「対角の和が等しく，かつ対辺の和が等しい凸四角形」であるということがわかった。

3. 双心四角形の面積

双心四角形については，次のような美しい形の面積公式が知られている。

双心四角形の面積公式

四角形ABCDが双心四角形であるとき，AB=a，BC=b，CD=c，DA=dとおくと，四角形ABCDの面積Sは，$S=\sqrt{abcd}$と表される。

この公式を証明する前に，円に内接する四角形において成り立つ次の公式を示す。

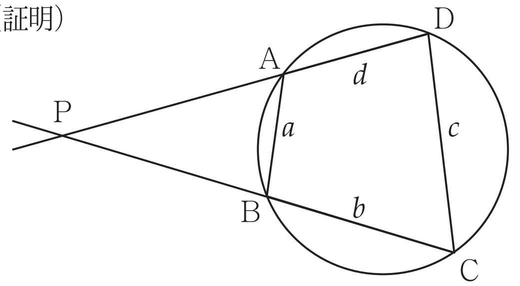
ブラマグプタ（Brahmagupta）の公式

円に内接している四角形ABCDにおいて，$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$とおく。このとき，

$s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ とおけば，四角形ABCDの面積Sは，

$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ と表される。

（証明）



四角形ABCDが長方形であるときは，$a=c$，$b=d$だから，$s=a+b$となって，$S=ab$が成り立つ。以下，四角形ABCDが長方形でないとすると，BCとADが平行でなく，DAの延長とCBの延長が図のように点Pで交わるとしても一般性を失わない。

二角相等より△PAB∽△PCDであるから，PAの長さ，PBの長さ，四角形ABCDの面積Sについて，

$$PA=PC\times\frac{a}{c}=(PB+b)\times\frac{a}{c}\quad\cdots①$$
$$PB=PD\times\frac{a}{c}=(PA+d)\times\frac{a}{c}\quad\cdots②$$
$$S=\triangle PAB\times\frac{c^2-a^2}{a^2}\quad\cdots③$$

が成り立つ。①②を連立方程式とみて解くと，

$$PA=\frac{a(bc+ad)}{c^2-a^2},\quad PB=\frac{a(ab+cd)}{c^2-a^2}$$

を得る。

ここで△PABにおいてヘロンの公式を用いると，3辺の和の半分をtとおけば，

$\triangle PAB=\sqrt{t(t-PA)(t-PB)(t-AB)}$ で，

$$t=\frac{a(bc+ad+ab+cd+c^2-a^2)}{2(c^2-a^2)}$$
$$=\frac{a\cancel{(c+a)}(b+d+c-a)}{2\cancel{(c+a)}(c-a)}$$
$$t-PA=\frac{a(-bc-ad+ab+cd+c^2-a^2)}{2(c^2-a^2)}$$
$$=\frac{a\cancel{(c-a)}(-b+d+c+a)}{2(c+a)\cancel{(c-a)}}$$
$$t-PB=\frac{a(bc+ad-ab-cd+c^2-a^2)}{2(c^2-a^2)}$$
$$=\frac{a\cancel{(c-a)}(b-d+c+a)}{2(c+a)\cancel{(c-a)}}$$
$$t-AB=\frac{a(bc+ad+ab+cd-c^2+a^2)}{2(c^2-a^2)}$$
$$=\frac{a\cancel{(c+a)}(b+d-c+a)}{2\cancel{(c+a)}(c-a)}$$

以上と③より，

$$S=\triangle PAB\times\frac{c^2-a^2}{a^2}$$
$$=\sqrt{\frac{a^4(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{2^4(c+a)^2(c-a)^2}}\times\frac{c^2-a^2}{a^2}$$
$$=\sqrt{\frac{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c+d)}{2^4}}$$

ここで，$s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ とおけば，

$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ を得る。（終）

双心四角形においては$a+c=b+d$であるから，すなわち$s=a+b$または$s=c+d$となり，これをブラマグプタの公式に順次代入することによって，面積公式$S=\sqrt{abcd}$ はただちに得られる。

式変形は複雑だが，途中から見通しが良くなり，証明したい式に向かって項が次々と因数分解され消えていくところで，この式変形には代数的な面白さがある。ヘロンの公式や方べきの定理とも関係があり，計算量は少なくないので，一般的には高校1年生向けとするのが適切であろうが，中学生でも得意な生徒には是非手を動かして体験してもらいたい公式の導出である。

4. 特殊な双心四角形の探究

《直角をもつ双心四角形》

例えば，正方形が双心四角形であることは自明であるが，正方形でない長方形は内接円を持たないので，双心四角形とはなりえない。このような洞察を経て，いま，双心四角形ABCDにおいて，

$$\angle B=\angle D=90^\circ$$

であることを仮定したとき，その四角形がどのような

四角形であるかを考えてみる。

条件より，対角線ACによって四角形ABCDは2つの直角三角形ABCとACDに分けられる。$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$とおくと，三平方の定理より，

$$a^2+b^2=AC^2=c^2+d^2$$

が成り立つ。さらに，四角形ABCDが内接円を持つことから，等式$a+c=b+d$が成り立っている。そこで，$a+c=b+d=s$とおくと，c，dに代入して，

$$a^2+b^2=(s-a)^2+(s-b)^2$$
$$2s^2-2sa-2sb=0$$
$$s-a-b=0 \qquad (\because 2s\neq 0)$$

ここから$s=a+b$が得られるので，すなわち$b=c$，$a=d$であり，四角形ABCDはたこ形である。正方形はたこ形の特別な場合とも考えることができるから，このことから，次のことが導かれたと言える。

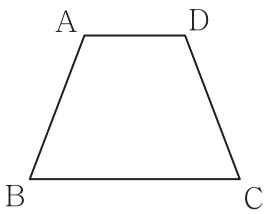
直角を持つ双心四角形

直角を持つ双心四角形は，たこ形である。
また，直角を2つもつたこ形は，双心四角形である。

《等脚台形の双心四角形》

ここでは等脚台形として，次の条件を仮定する。

四角形ABCDにおいて，
AD // BC,
$\angle B=\angle C<90^\circ$



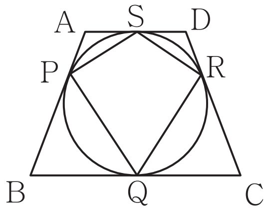
このとき，BAの延長とCDの延長との交点Pを考えることにより，PB=PC，PA=PDであることから，AB=CDが導ける。また，$\angle A+\angle B=180^\circ$であることから，$\angle A+\angle C=180^\circ$となり，すべての等脚台形は円に内接することもいえる。したがって，次のようになる。

等脚台形が双心四角形であるための条件

四角形ABCDがAD // BC，$\angle B=\angle C<90^\circ$を満たすとき，$AD+BC=2AB$ならば，四角形ABCDは双心四角形である。

さらに，等脚台形の内接円について調べていくと，次のようなことがわかる。

《等脚台形とたこ形》



AD // BC，$\angle B=\angle C$である等脚台形ABCDが内接円をもつとき，その円の直径は平行な辺ADとBCとの距離に等しい。

四角形ABCDの内接円が4辺AB，BC，CD，DAと接する点をそれぞれP，Q，R，Sとおくと，対称性から，SQは直径となり，∠SPQ，∠SRQはともに直角となる。さらに，△SPQ≡△SRQであるから，四角形PQRSは直角を2つもつたこ形であり，双心四角形となる。また，$\angle PSR=\angle A>90^\circ$であるから，四角形PQRSの内接円が4辺SP，PQ，QR，RSと接する点A′，B′，C′，D′を結ぶと，四角形A′B′C′D′は再び長方形でない等脚台形となる（ただし四角形ABCDと相似ではなく，双心四角形とも限らない）。

《4辺の長さおよび面積が自然数値の双心四角形の例》

四角形ABCDがAD // BC，$\angle B=\angle C<90^\circ$の等脚台形であり，$AB=CD=a$，$BC=b$，$DA=d$とおくと，$b+d=2a$であるから，$b=a+p$，$d=a-p$と表すことができる。このとき，前述の面積公式を適用すると$S=a\sqrt{a^2-p^2}$となり，a^2-p^2が平方数ならば，面積Sが自然数となることがわかる。いま，a，b，dをいずれも自然数とおけば，pも自然数であり，a，p，$\sqrt{a^2-p^2}$はピタゴラス数ということになる。実際これは，AからBCに垂線を下ろし，その足をHとすれば，△ABHの3辺がこのピタゴラス数になり，双心四角形の面積公式が成り立つことが実感できる例となっている。

5. 今後の課題

面積が無理数であっても，等脚台形であれば4辺の長さが自然数値の双心四角形は，前述の方法で無数に構成できる。一方，台形でもたこ形でもない四角形で，4辺の長さが自然数値である双心四角形は，本実践ではまだ見つかっておらず，存在するのか，あるいは存在しないことが証明できるのかどうか，今後の課題としたい。

参考文献

Wolfram Mathworld “Bicentric Polygon”
http://mathworld.wolfram.com/BicentricPolygon.html

（2015 須藤）

D2-2.　３次関数の性質と応用

関連分野	：代数分野
高等数学	：微分法
対象学年	：高校２年生
関連単元	：３次関数の性質
教 材 名	：３次関数の性質を見抜く

≪関数が持つ様々な性質について考察する教材≫

中学から学習をする「１次関数」,「２次関数」の話題を高校において改めて取り上げることは多い。直線と放物線の関係に注目する問題や，図形と方程式などで扱う接線の問題，微積分などの問題など多岐に渡って扱われる。ここでは，高校２年生で初めて登場する「３次関数」について，中高で学習する１次関数や２次関数を用いて性質を考察し，３次式の図形的な意味や，３次関数を特徴づける要素について学ぶ教材を紹介する。過去に発表した本校開発教材集の中でも多く扱われている『関数』についての教材を基礎にした，さらに発展的な内容となる。

３次関数のグラフについて，もっとも大きな特徴として挙げられる，点対称性に注目し，幾何的なアプローチから問題を解くことで，３次関数の性質を見抜く力を養うことを目標とする。

なお，指導対象となる高校２年生は本校の教材集で扱われているようなカバリエリの法則や，２次関数の面積の性質，関数の和と差などの教材が既習であることを付記しておく。

1―1.　３次関数の点対称性

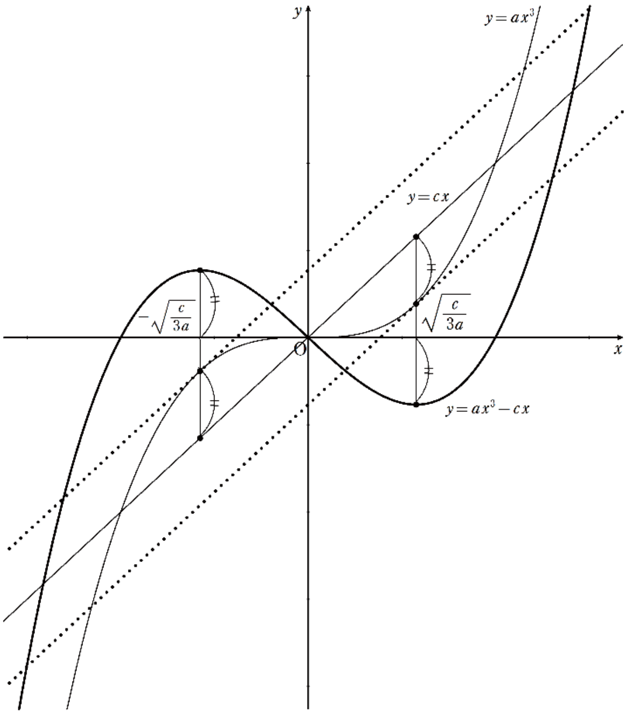
３次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ は，まずは１回微分をして，極大値，極小値を求め，増減表を作り，グラフを描くという手順が一般的な解析の方法である。もちろん，ある点において点対称ではあるのだが，変曲点についての議論は２回微分が必要となるので，数学Ⅱで扱うことはできない。しかし，点対称の基準となる点を以下のようにして考えることで，３次関数の性質を見ることが可能となる。

また，点対称性を用いた３次関数の性質としてよく扱われる４等分性や，極値をとる点における接線の利用も実際の授業では扱った。また，接線の導出や微分法もすべて既習の段階でこの題材を扱ったので，できるだけ微分をしないで３次関数の解析はできないか，という問いかけをすることを心掛けた。

1―2.　$y=ax^3$ のグラフと直線

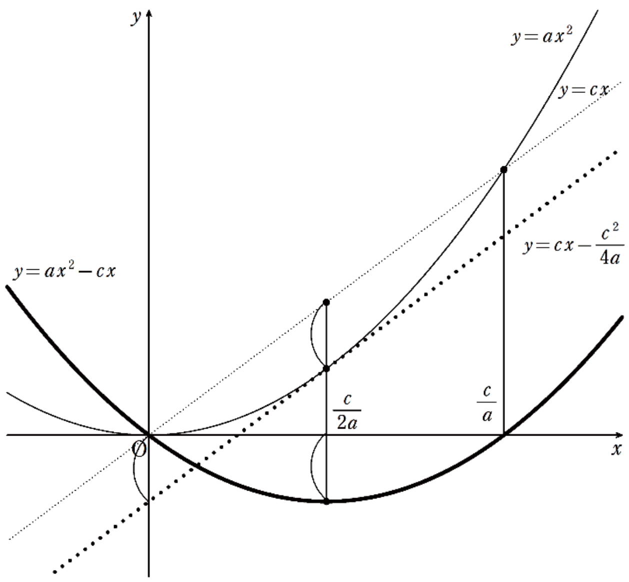
２次関数において，もっとも基本となるグラフは原点が頂点となる $y=ax^2$ である。すべての２次関数はこのグラフを平行移動したものであり，かつ，相似であることは言うまでもない。言い換えるとすべての２次関数の基準となる関数は $y=ax^2$ である。また，このグラフは y 軸について線対称であり，その性質は放物線の大きな特徴として扱うこととなる。

そこで，同様に，３次関数であれば，$y=ax^3$ を基準にしたいと考えたいところではあるが，残念ながら２次関数のような相似性をもっていない。原点において点対称であることは明らかであるが，すべての３次関数はこのグラフを平行移動したものではない。そこで, $y=ax^3$ と, $y=cx$ のグラフの位置関係を考え，３次関数と１次関数の差をとった関数，$y=ax^3-cx$ のグラフについて考察する。



図のように, 点対称の関数 (奇関数) の差になるので, その対称性は維持されて，新たな関数は原点対称のグラフとなり，その極値をとる点というのは，$y=cx$と同じ傾きを持つ $y=ax^3$ の接線の接点の x 座標に一致している。それはグラフの位置関係を見れば明らかで, $y=ax^3-cx$ の極値は $x=\pm\sqrt{\frac{c}{3a}}$ の y 座標であり，その値は，$x=\pm\sqrt{\frac{c}{3a}}$ における $y=cx$ と

$y = ax^3$ の差になっている。この関係は，２次関数と１次関数の差の関係でも同様のことがわかり，たとえば，$y = ax^2 - cx$ とすると，$y = ax^2$ と$y = cx$ の交点の x 座標は，$x = 0$，$\frac{c}{a}$ となり，その中点 $x = \frac{c}{2a}$ がちょうど $y = ax^2 - cx$ の頂点の x 座標である。そして，中点 $x = \frac{c}{2a}$ における，$y = ax^2$ の接線は $y = cx$ と傾きが同じとなり，先ほど述べた３次関数の場合と同様の関係が見ることができる。



ここで興味深いのは２次関数の場合も３次関数の場合も，差をとった１次関数と傾きが同じ接線の y 切片は極値に一致していることで，これも理由は図より明らかである。このような性質を考えることで３次関数の様々な問題について，微分に頼らない解法が生徒から提案された。

> 問題
> 関数 $y = x^3 - 12x$ の極小値とそのときの x の値を求めよ.

もちろんこの関数を微分することで極値を出すことができるのだが，$y = x^3$ と，$y = 12x$ のグラフを考えることで極値を導き出す。傾きが 12 になる$y = x^3$ の接線の x 座標は $x = \pm 2$ である。したがって，求める関数の極小値を与える x 座標は$x = 2$ であり，極小値は $2^3 - 24 = -16$ である。

2.　３次関数の点対称性とその応用

ここで任意の３次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ について，その変曲点をとる x 座標を３次関数の点対称性から，点対称の中心点と呼ぶことにする。そこで，その中心点は簡単な計算から，x 座標が

$$x = -\frac{b}{3a}\ \cdot\cdot\cdot(※)$$

と表される。すなわち，すべての３次関数はこの中心点を平行移動したものであり，２次関数と同様に相似拡大したものと考えることができる。したがって，原点対称である関数，$y = ax^3 - cx$ を平行移動することですべての３次関数を決定することができるのである。そのように考えて次のような問題を取り組む。

> 問題
> 関数 $y = 2x^3 + 9x^2 - 3x - 7$ が$x = \alpha$ で極大値 M をとり，$x = \beta$ で極小値 m をとるとき，$\beta - \alpha$ の値と M－m の値を求めよ.

こちらは，微分法を学習する際に頻出する問題の一つで，定積分から求める解法や，微分した式から導出する 2 次方程式の解と係数の関係から求める手法など，多くのことを学ぶことができる問題として有名である。しかし，この問題も生徒から微分の使い方を工夫して計算量を圧倒的に減らした解法が提案された。

その方法は，与えられた関数をそのまま考えるのではなく，先述の関数，$y = ax^3 - cx$ に平行移動するという方法である。

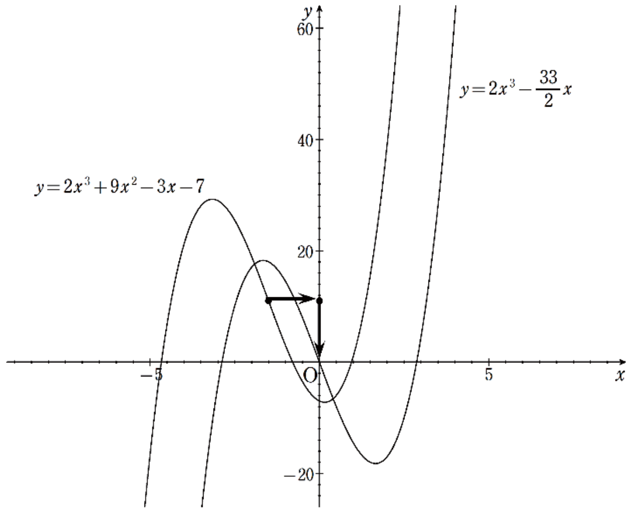
（解）この３次関数の点対称の中心は $x = -\frac{3}{2}$ であることから，その座標は$\left(-\frac{3}{2},\ 11\right)$であるから，$x$ 軸方向に $+\frac{3}{2}$，y軸方向に -11 平行移動すると，

$$y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 + 9\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(x - \frac{3}{2}\right) - 18$$

一見大変そうな計算ではあるが，結果は定数項と２次の項の係数は０であるから，１次の項のみの係数を計算すればよく，

$$y = 2x^3 - \frac{33}{2}x$$

となる。



この３次関数の極値をとる座標はて, $y=2x^3$ と, $y=\frac{33}{2}x$ のグラフの関係を考えて，$y=2x^3$ の接線の傾きが $\frac{33}{2}$ となるような x 座標を考えればよく，

$$x=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}$$

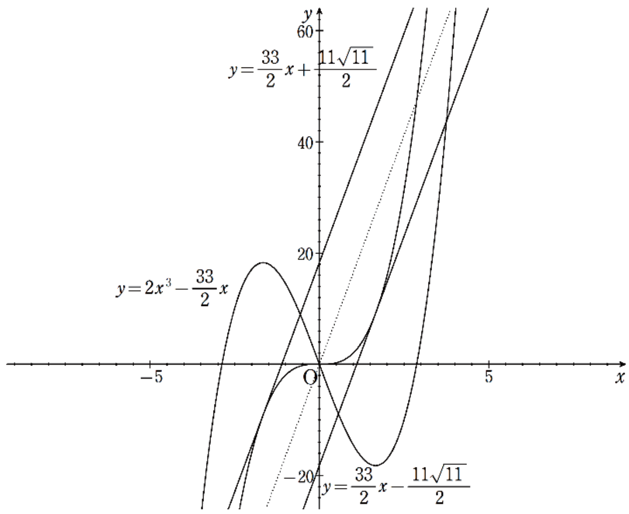
のときとわかる。したがって求める値は,

$$\beta-\alpha=\sqrt{11}$$

である。また極値の差は，$y=2x^3$ の$x=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}$ における接線の y 切片の差を考えればよく，接線の方程式が

$$\mathrm{y}=\frac{33}{2}x\pm\frac{11\sqrt{11}}{2}$$

より，$\mathrm{M}-\mathrm{m}=11\sqrt{11}$ である。



ここで, この結果に注目すべきは, 接線の y 切片がそのまま極大値・極小値に一致していることが興味深い結果である。これは，関数の差を考えているためで，先述の **1−2** で扱ったことが根拠となっている。したがって煩わしい３次式の計算をすることなく極値を求めることもできる。

また，$x=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}$ は$y=2x^3+9x^2-3x-7$ の $y'=6x^2+18x-3$ で$y'=0$ を解いたときに出てくる，解の公式の無理数の部分であり，この

$$y'=6x^2+18x-3$$

を２次関数でみたときにx 軸と交わる点であることがわかるので，この２次関数の軸を与えるx 座標が３次関数の点対称の中心となっていることもわかる。

このようにこの問題では出てきた結果を眺めていろいろなアプローチで３次関数の性質を垣間見ることができた。

3.　３次関数決定問題への応用

> $\boxed{\text{問題}}$
> $x=1$ で極大値６をとり, $x=2$ で極小値５をとる３次関数を求めよ.

高校２年生で微分法を取り組む際に，とてもよく出題される典型的な問題で，一般的には極値をとる条件から$f'(x)$ を計算し，連立方程式を用いて計算する解法がある。しかし，すべての３次関数は上記の奇関数の平行移動と拡大で考えることができる。微分を使わず, 最も基本的な３次関数として, $y=ax^3-cx$ を用いた解法を紹介する。こちらも生徒から提案された解法である。

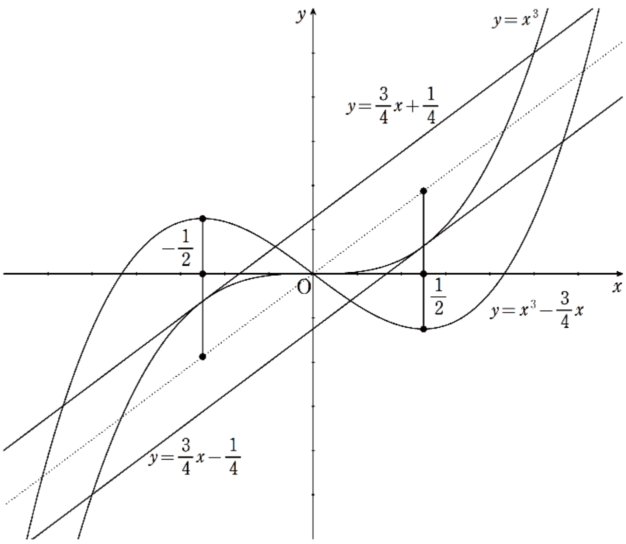
（解）まず，求める極値をとる x 座標と y 座標の差がそれぞれ１であることに注目する。

そこで, $y=x^3$の関数と原点を通る直線の関数の差を考えて極値をとるx 座標の差が１となるものを作ることを考える。すなわち，奇関数 $y=x^3-cx$ を考えて, $x=\pm\frac{1}{2}$ において極値をとるような関数を作ればよい。

これまでの問題とは逆に考えれば，$y'=3x^2$ より，傾きが $\frac{3}{4}$ である原点を通る直線　$y=\frac{3}{4}x$ で $y=x^3$ から差をとった関数，すなわち,

$$y = x^3 - \frac{3}{4}x$$

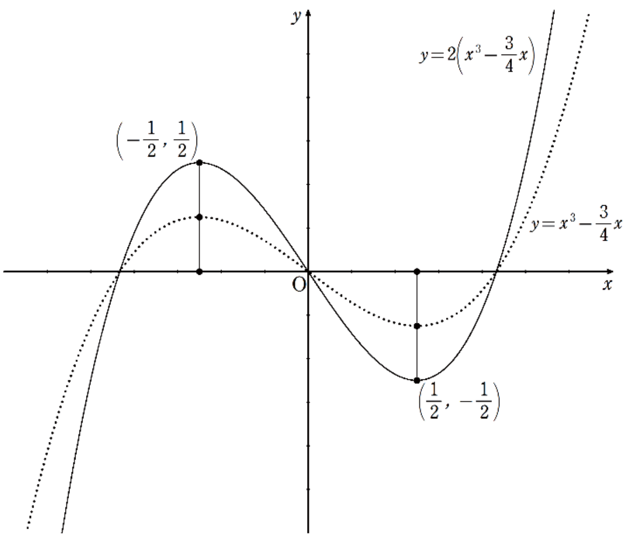
を考えればよい。すると，グラフは以下のようになる。



グラフより，x 座標の差が１であるが，y 座標の差は $\frac{1}{2}$ となる。そこで，この関数は原点対称であるから，y 軸方向に２倍に相似拡大すればy 座標の差は１となる。その関数は

$$y = 2\left(x^3 - \frac{3}{4}x\right)$$

であり，グラフは次のようになる。



また，題意より（極大と極小の平均が点対称の中心となる），求める関数の点対称の中心は $\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$ であることから，$y = 2\left(x^3 - \frac{3}{4}x\right)$を$x$ 軸方向$+\frac{3}{2}$にy 軸方向に$+\frac{11}{2}$ だけ平行移動すればよく，求める関数は，

$$y = 2\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 - \frac{3}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right)\right) + \frac{11}{2} \quad ・・・(※※)$$

となる。

ところで，(※※)の式を計算すると，

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$$

となる。ここで，逆の操作を考えてみると，２次関数における平方完成の式変形とよく似ていることがわかる。３次の場合，点対称の中心を原点に平行移動する変形を考える際，「２次の項と定数項を０にする」ことができればよいということに気が付く。したがって，２次係数が０になれば，３次関数は平行移動し，y 軸上に点対称の中心が来ていることがわかる。

すなわち，

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

から平行移動した関数，

$$f(x - \alpha) = a(x - \alpha)^3 + b(x - \alpha)^2 + c(x - \alpha) + d$$

を計算し，２次の項が０になるように α を決めればよい。したがって，このときの α は

$$\alpha = \frac{b}{3a}$$

であるから，$f(x)$ の点対称の中心は，

$$x = -\frac{b}{3a}$$

という x 座標となる。これが前章にある(※)についての論証となる。

この問題についても，ただの計算問題ではなく，３次関数の性質を深く考察ができ，原点対称の３次関数を使って考えればどのような３次関数も相似拡大で関数決定ができるという結果になっている。

4.　接線への応用

本校開発教材集，「d3　２次関数の接線」において紹介されているように，２次関数の接線は連立方程式の重解条件を使うことで以下のように求めることができる。

★２次関数　$f(x) = ax^2 + bx + c$　の$x = \alpha$　における接線は，求める直線を　$y = g(x)$　とおくと，$y = f(x)$　との連立方程式の解が$x = \alpha$　で重解である

ことから，$f(x)-g(x)=a(x-\alpha)^2$　である。
従って求める直線の方程式は

$$y=g(x)=ax^2+bx+c-\ a(x-\alpha)^2$$

である。

ここでは，これを３次関数に拡張することを考える。そこで，先述の３次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ の点対称の中心は

$$x=-\frac{b}{3a}$$

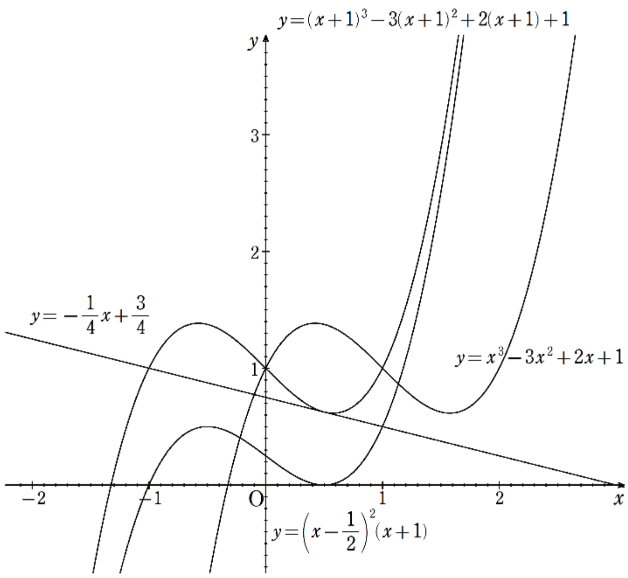
であることを注意し，次の問題に取り組む。

$\boxed{\text{問題}}$
$y=x^3-3x^2+2x+1$ の $x=\frac{3}{2}$ における接線の方程式を求めよ.

もちろん，微分をすれば方程式を導出することも簡単ではあるが，ここでは，点対称の中心に注目し，その中心を y 軸上にするように平行移動を考える。

今，この関数の中心は(1，1）であることから，x 軸方向に -1 だけ平行移動する関数を考える。

$$y=(x+1)^3-3(x+1)^2+2(x+1)+1$$
$$=x^3-x+1\ \cdot\cdot\cdot\ (*)$$



この平行移動した関数は原点において点対称であることから，以下の図にあるように，y 軸上に中心をもち，x 軸上において$x=\frac{1}{2}$ で接しているような３次関数は

$$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(x+1)$$

と書くことができる。

従って，（∗）の３次関数の$x=\frac{1}{2}$ における接線の方程式を $y=g(x)$ とおくと，（∗）との連立方程式は $x=\frac{1}{2}$ で重解を持つような３次方程式で，その中心の x 座標がy 軸上にある３次関数，すなわち，

$$x^3-x+1-g(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(x+1)$$

となり，

$$g(x)=x^3-x+1-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(x+1)$$
$$=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$$

である。求める接線の方程式はこれをx 軸方向に $+1$, だけ平行移動すればよく，

$$y=-\frac{1}{4}(x-1)+\frac{3}{4}$$

となる。

中学代数の授業において，本校で開発された教材を様々な場面で利用し，高校１年生で今一度関数の基本的な性質に触れたあと，微分法の単元を改めてみてみると，それまでに培ったアイデアと，新しい発想で，計算練習ばかりになりがちな微分法の授業が本当に盛り上がる結果になった。

扱っている題材としてはとてもシンプルであり，どれも微分法の授業では典型とされるものばかりである。関数の性質を見極めることで，２次関数・３次関数で囲まれる部分の面積についても定積分をしないで取り組むことができる。何より，これらの考え方のベースはカバリエリの原理にあり，ここまでの授業で折に触れて扱ってきたことがこのような教材開発につながったと言える。生徒が自分でこのような解法を持ってきたときの盛り上がりは本当に楽しいものである。

(2015　三井田)