

61. 円環内移動及び円環・円盤間移動の直線距離に関する解析的研究 Average Euclidean distance between two random points in rings

長晃*・石井儀光**・高原勇***・大澤義明****
Akira CHO*, Norimitsu ISHII**, Isamu TAKAHARA***, Yoshiaki OHSAWA****

The present paper analyzes the expected Euclidean distances on the ring where the origins and destinations are uniformly and independently distributed. We derive the analytical form of average distance not only within a ring but also between two rings by using Crofton's formula in geometrical probability. Since our results encompasses both circle and arc, we fairly extend existing works as far as mathematical form is concerned. In addition, we derive the volume of through traffic whose origin and destination are both generated in outer ring. The theoretical results are applied to the cost allocation problem for road maintenance which is one main topics of city planning in Japan. The formulation was chosen as simple as possible in order not to blur the issue of cost sharing.

Keywords: Ring, Crofton's formula, Through traffic, Road maintenance
円環, クロフトンの微分方程式, 通過交通, 道路維持管理

1 はじめに

明治以降, 日本が近代国家として成熟する過程で, 都道府県領域は一貫してほぼ固定されてきたが, ライフスタイルやそれを支える社会経済は大きく変化した。特に, モータリゼーションによって住民の生活行動圏域は飛躍的に拡大し, 交通行動は行政域の中で自己完結しない。そのため, 受益者負担原則に従うと, 行政域単位の管轄による道路マネジメントの現制度は限界を迎えている。少子高齢化や財政難を抱える地方自治体には, 道路などのインフラ維持管理は大きな負担である。地方分権改革の流れで直轄国道の地方への移管が進められているが, 一方で生活行動圏域が拡大し道路管轄範囲との間に齟齬が発生している。そのため, 県外や市外からのドライバーによる通過交通がフリーライダーとして大きな課題となる。つまり, 通過交通を受ける自治体は納税者とはならないユーザーのために維持管理の負担をしなければならないのである。

本研究では, このような受益と負担との乖離に関して明快な結論を導くために, 極力単純化した都市モデルで通過交通量の発生規模を数値化し, 道路維持管理費用負担の観点から考察する。そして, 後続研究に確固たる基礎的結果を提供するためにも解析的結果の導出に重きを置く。そのため, 図1に示すような中心部を含む円盤ゾーン(内側領域)とそれを取り囲む円環ゾーン(外側領域)とに同心円分割されている円形都市を考える。駅などを核とし, 中心業務地域, 商業地域, 中高層住宅, 低層住宅へと土地利用が段階的にドーナツ型で変化する円形都市は, 都市構造の基本であり¹⁾²⁾, 付け値地代理論³⁾による裏付けがあり都市経済学的にも理にかなっている。移動については, 円形都市内においてトリップの起点と終点が互いに独立かつ一様に分布し, あらゆる方向に移動できる, つまり直線

移動する状況を考える。実際多くの都市モデルは同心円都市を想定し直線移動にて理論を展開している。同心円都市モデルはスケールフリーであるが, 直線移動を想定しているので, 中心都市と周辺都市という都市圏や県庁所在都市と周辺市という状況に適用できる。直線移動するため, 円環ゾーンを起終点とする移動が, 円盤ゾーンを通過する場合がある。この通過交通の発生量に着目する。本研究の目的は, (i) ゾーン内・ゾーン間距離, (ii) 円盤ゾーン通過距離, これら2種類の平均値を解析的に求め, 通過交通という観点から自治体の道路維持管理への応用を試みることにある。前者が理論的貢献であり, 後者が応用的貢献である。

ゾーンまでの距離は円周上どこでも同一だという円の特徴を活かし, クロフトンの微分方程式⁴⁾⁵⁾⁶⁾⁷⁾⁸⁾を用いてトリップあたりの通過交通の平均距離を算出する。なお, 円盤上にランダムに分布する二点間距離⁴⁾や円周上でランダムに分布する弦の長さ⁶⁾が既に導出されている。円環を構成する二つの同心円のうち, 内側同心円を狭めると円環は円盤へ収束し, 内側同心円を拡大させると円環は円弧に収束する。円盤や円弧は円環の一部と考えられるので, 本研究が取り扱う図形は既存研究結果を大きく拡張する。この点がまず理論的貢献である。

円環ゾーン内に起終点がともにランダムに分布する二点間距離の平均値は間接的ながら既に導出されている⁶⁾。本研究ではこの平均値を別の方法としてクロフトンの微分方程式で直接求める。ランダムな二点間距離の導出に対するこのような解法についても, もう一つの理論的貢献と考える。解法へ多くの道筋を示すことで, 幾何確率による課題解決へ多様な情報を提供できると考えるからである。

*学生会員 筑波大学大学院システム情報工学研究科 (University of Tsukuba)

**正会員 国立研究開発法人建築研究所住宅・都市研究グループ (Building Research Institute)

***正会員 筑波大学未来社会工学センター (University of Tsukuba)

****正会員 筑波大学社会工学域 (University of Tsukuba)

2 通過交通

2.1 外周・円環ゾーン間移動

図1左側のように、半径 b の円盤ゾーンと幅 $a-b$ の円環ゾーンとから構成される円形都市を考える。ただし $a \geq 0, 0 \leq b \leq a$ とする。本節では、起終点がともに円環ゾーンでランダムに発生するトリップを考え、円盤ゾーンで発生する通過交通 l に関する平均距離を計算する。図1中央と右側のように、二種類の移動パターンを順次想定する：(i) 起終点のどちらか一方が外周で発生、(ii) 起終点ともに円環内で発生。前者は点から面、後者は面内の移動である。

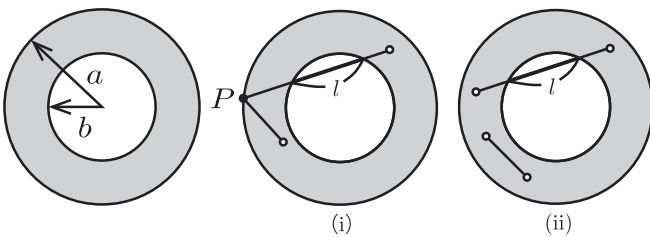


図1: 円形都市 ($\kappa = 0.552$) と二つの移動パターン

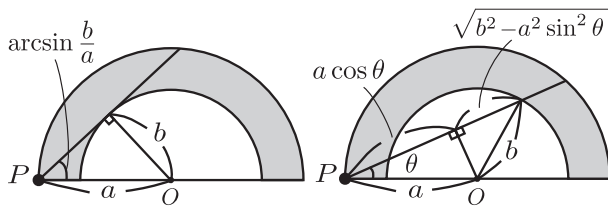


図2: 通過交通量を計算するための変数の定義

まず、移動パターン (i) での平均距離を求める。図1中央に示すように、外周上の点 P を考える。外周のどの場所を選んでも平均距離は同じであることに留意したい。点 P と中心 O とで定まる半円を考える：図2参照。角度 θ が小さくトリップ長が長いと円盤ゾーンを横切ることになる。この角度の境目は $\sin \theta = \frac{b}{a}$ を満たすので、 $\kappa \equiv \frac{b}{a}$ と定義する。二つの円の半径比 κ は $0 \leq \kappa \leq 1$ を満たす。

図2から理解できるように、 $0 \leq \theta \leq \arcsin \kappa$ を満たす θ を固定すると、トリップ長 ρ が

$$\left[a \cos \theta + a \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \theta}, 2a \cos \theta \right]$$

の範囲に含まれれば通過交通が発生する。この範囲を積分範囲とし、 ρ に比例して重みが増えることに注意すると⁶⁾、角度 θ にて通過交通が発生する測度は、

$$\begin{aligned} & J(\theta) \\ \equiv & \int_{a \cos \theta + a \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \theta}}^{2a \cos \theta} \rho d\rho \\ = & \frac{a^2}{2} \left(3 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \theta} - (\kappa^2 - \sin^2 \theta) \right). \end{aligned}$$

さらに、通過交通の長さは

$$2a \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \theta}$$

となる。 $\arcsin \kappa \leq \theta \leq 0$ という対称となる場合も考慮すると、円環ゾーンの面積は $\pi(a^2 - b^2)$ であるから、半径 b の円盤ゾーンを通過する長さの平均値 $\mu_1(\kappa)$ は次のようになる：

$$\begin{aligned} \mu_1(\kappa) &= \frac{2}{\pi(a^2 - b^2)} \int_0^{\arcsin \kappa} 2a \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \theta} J(\theta) d\theta, \\ &= \frac{2}{\pi(1 - \kappa^2)} \int_0^{\arcsin \kappa} a \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \theta} \\ &\quad \left(3 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \theta} - (\kappa^2 - \sin^2 \theta) \right) d\theta. \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、上式の積分値を $I(\kappa)$ と置くと、

$$\begin{aligned} I(\kappa) &= -2 \int_0^{\arcsin \kappa} \cos \theta (\kappa^2 - \sin^2 \theta) d\theta \\ &\quad + (3 - \kappa^2) \int_0^{\arcsin \kappa} \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \theta} d\theta \\ &\quad - 2 \int_0^{\arcsin \kappa} \sin^2 \theta \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \theta} d\theta. \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)の右辺第一項は単純な三角関数の積分である。第二項及び第三項は多少複雑な積分となる。 $\phi \equiv \arcsin(\kappa^{-1} \sin \theta)$ と置き θ から ϕ へ変数変換すると、 $\frac{d\phi}{d\theta} = -\kappa \frac{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi}}{\cos \phi}$ となるので、これらの積分はそれぞれ

$$\begin{aligned} & \int_0^{\arcsin \kappa} \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \theta} d\theta \\ = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\kappa^2 \cos^2 \phi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi}} d\phi \\ = & E(\kappa) - (1 - \kappa^2) K(\kappa), \quad (3) \\ & \int_0^{\arcsin \kappa} \sin^2 \theta \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \theta} d\theta \\ = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \phi \cos^2 \phi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi}} d\phi \\ = & \frac{(2 - \kappa^2) E(\kappa) - 2(1 - \kappa^2) K(\kappa)}{3}. \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 $K(\kappa)$ 、 $E(\kappa)$ は、それぞれ第一種完全楕円積分、第二種完全楕円積分と呼ばれ⁹⁾、

$$\begin{aligned} K(\kappa) &\equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi}} d\phi, \\ E(\kappa) &\equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi} d\phi \end{aligned}$$

であり、 $K(0) = E(0) = \frac{\pi}{2}$ 、 $E(1) = 1$ となる。式(3)及び式(4)を式(2)へ代入し、整理すると、

$$\begin{aligned} I(\kappa) &= \frac{-4\kappa^3 + (5 - \kappa^2) E(\kappa) - (1 - \kappa^2)(5 - 3\kappa^2) K(\kappa)}{3}. \end{aligned}$$

以上から、端点 P からの平均値は、二種類の完全楕円積

分を含む関数となり、次のようになる：

$$\mu_1(\kappa) = \frac{2((5-\kappa^2)E(\kappa) - (1-\kappa^2)(5-3\kappa^2)K(\kappa) - 4\kappa^3)}{3\pi(1-\kappa^2)} a.$$

二つの特別な場合 ($b=a, b=0$) を考える. $\mu_1(a)$ を求めるために、ロピタルの定理を用いる.

$$\frac{dK(\kappa)}{d\kappa} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{E(\kappa)}{1-\kappa^2} - K(\kappa) \right), \quad (5)$$

$$\frac{dE(\kappa)}{d\kappa} = \frac{1}{\kappa} (E(\kappa) - K(\kappa)), \quad (6)$$

が成り立つ⁹⁾. これらを用い、

$$\lim_{\kappa \rightarrow 1} (1-\kappa^2)K(\kappa) = 0 \quad (7)$$

に注意しながら、

$$\mu_1(1) = \frac{4}{\pi} a, \quad \mu_1(0) = 0$$

となり、前者 ($a=b$) は円環ゾーンが消滅するのでランダムな二点間が生じる弦長の期待値⁶⁾と一致する. 一方、後者 ($b=0$) は円盤ゾーンが消滅するので通過交通は発生しない.

2.2 円環ゾーン内移動

次に移動パターン (ii) を考え、円盤ゾーンの通過距離の平均 $\mu(\kappa)$ を求める. 面積が V の領域にて N 個の点が分布する状況においてクロフトンの微分方程式⁴⁾⁵⁾⁶⁾⁷⁾は

$$\frac{d\mu(\kappa)}{dV} = \frac{N(\mu_1(\kappa) - \mu(\kappa))}{V}$$

と定式化できる. 円環上に2点が分布するので、円環面積 $V = \pi(a^2 - b^2)$, 点個数 $N = 2$, さらには V から a へ変数変換 $\frac{dV}{da} = 2\pi a$ を代入すると、

$$\frac{d\mu(\kappa)}{da} = \frac{4a}{a^2 - b^2} (\mu_1(\kappa) - \mu(\kappa))$$

を得る. 従って、 $\mu(\kappa)$ について解くと

$$\mu(\kappa) = \frac{1}{a^2 - b^2} \left(4 \int a(a^2 - b^2) \mu_1(\kappa) da + C \right). \quad (8)$$

ただし C は積分定数である.

ここで $\frac{d\kappa}{da} = -\frac{\kappa^2}{b}$ に注意し、 a から κ への変数変換を施すと、式 (8) の不定積分は次のようになる：

$$\begin{aligned} & \int a(a^2 - b^2) \mu_1(\kappa) da \\ &= \frac{2b^5}{3\pi} \int \frac{4\kappa^3 - (5-\kappa^2)E(\kappa) + (1-\kappa^2)(5-3\kappa^2)K(\kappa)}{\kappa^6} d\kappa \\ &= \frac{2b^5}{3\pi} (3J_{-2} - 8J_{-4} + 5J_{-6} + I_{-4} - 5I_{-6} - 2\kappa^{-2}) \\ &= \frac{2a^5}{3\pi} ((1-\kappa^4)E(\kappa) - (1-\kappa^2)^2 K(\kappa) - 2\kappa^3). \quad (9) \end{aligned}$$

ただし、

$$J_n = \int \kappa^n K(\kappa) d\kappa, \quad I_n = \int \kappa^n E(\kappa) d\kappa,$$

と定義し、不定積分では整数 n に関する以下の漸化式¹⁰⁾を活用した：

$$J_{-2} = -\frac{E(\kappa)}{\kappa},$$

$$J_{-4} = -\frac{(1+4\kappa^2)E(\kappa) + 2(1-\kappa^2)K(\kappa)}{9\kappa^3},$$

$$J_n = \frac{1}{n^2} ((n-1)^2 J_{n-2} + \kappa^{n-1} (E(\kappa) - n(1-\kappa^2)K(\kappa))),$$

$$I_{-4} = \frac{2(\kappa^2 - 2)E(\kappa) + (1-\kappa^2)K(\kappa)}{9\kappa^3},$$

$$I_n = \frac{1}{n(n+2)} ((n-1)^2 I_{n-2} + \kappa^{n-1} ((n(1-\kappa^2) - 2)E(\kappa) - (1-\kappa^2)K(\kappa))).$$

式 (9) を式 (8) へ代入して積分定数 C を求めると、 $C = \frac{16}{3\pi} b^5$ となる. 以上から、

$$\mu(\kappa) = \frac{8((1+\kappa^2)E(\kappa) - (1-\kappa^2)K(\kappa) - 2\kappa^3)}{3\pi(1-\kappa^2)} a. \quad (10)$$

円環ゾーン消滅 ($b=a$) と円盤ゾーン消滅 ($b=0$) の場合、式 (5)、式 (6)、式 (7) 及びロピタルの定理から

$$\mu(1) = \frac{4}{\pi} a, \quad \mu(0) = 0$$

となり移動パターン (i) と同様の結果を得る.

$\mu(\kappa)$ は図3の実線のようになり、右上がりの下に凸な関数となる. 実際、

$$\begin{aligned} \mu'(\kappa) &= \frac{8\kappa}{3\pi(1-\kappa^2)^2} ((5-\kappa^2)E(\kappa) \\ &\quad - 2(1-\kappa^2)K(\kappa) - 2\kappa(3-\kappa^2)) a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu''(\kappa) &= \frac{8}{3\pi(1-\kappa^2)^3} (8(1+\kappa^2)E(\kappa) \\ &\quad - (5+3\kappa^2)(1-\kappa^2)K(\kappa) - 4\kappa(3+\kappa^2)) a \end{aligned}$$

であり、 $E(\kappa) \leq K(\kappa)$ に注意することで、 $\mu'(\kappa) \geq 0$ や $\mu''(\kappa) \geq 0$ を証明できる.

2.3 シミュレーションによる検証

特別な場合 ($\kappa=0, \kappa=1$) では既存結果と合致することは確認できたが、式 (10) の導出はかなり煩雑であり、結果も完全楕円積分を含んでおり複雑である. そこで、正しく導出されたかを別視点で確認するために、数値シミュレーション結果と比較する.

円環ゾーン内に一様に発生させた乱数による 10,000 組の 2 点の間について、半径比 κ ごとにその距離の平均値を求めたグラフを図3に示す. κ は 0 から 0.95 まで 0.05 刻みで変化させた. 乱数は M 系列乱数 (メルセンヌ・ツイスタ) を使用した. 図3から、実線で示した理論値と点線で示したシミュレーション値が合致しており、理論値が

間違っていると別方向から判断できなかった。

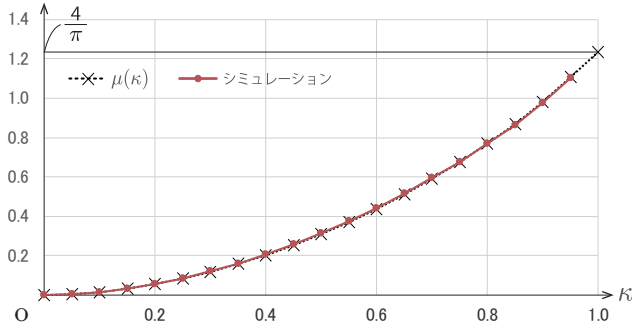


図 3: シミュレーションによる検証

2.4 インフラ維持管理への応用

図1のような円形都市では、円盤ゾーンの通過交通は起終点がともに円環ゾーンである以外には発生しない。その通過総距離は、トリップ量の重みを付けて $(1 - \kappa^2)^2 \mu(\kappa)$ となる。半径比 κ が小さいと円環ゾーンを起終点とするトリップは多いが通過交通が発生しにくい。一方で、半径比 κ が大きいと円環ゾーンを起終点とするトリップのほとんどが通過交通となるが、そもそもそのようなトリップ量は少ない。このようなトレードオフから、通過総距離 $(1 - \kappa^2)^2 \mu(\kappa)$ が最大となる半径比 κ が存在する。

通過総距離 $(1 - \kappa^2)^2 \mu(\kappa)$ を、半径比 κ の関数で図化すると、図4の点線のようにになる。図から $\kappa \approx 0.55$ 付近でピークを持つ単峰形となることが読み取れる。そこで、最大値となる状況を計算で求める。式(5)、式(6)を用いて等価変形すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\kappa} (1 - \kappa^2)^2 \mu(\kappa) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{d\kappa} (-2\kappa^3 + 2\kappa^5) \\ &+ (1 - \kappa^4)E(\kappa) - (1 - \kappa^2)^2 K(\kappa) = 0. \\ \Leftrightarrow -6\kappa^2 + 10\kappa^4 \\ &+ \kappa(1 - 5\kappa^2)E(\kappa) + 2\kappa(1 - \kappa^2)K(\kappa) = 0. \end{aligned}$$

最終式から極限値を数値的に解くと $\kappa \approx 0.552$ となる。図1と図5は $\kappa = 0.552$ の場合を示しており、このような半径比で通過総距離が最大となる。

3 総交通

3.1 外周・円環ゾーン間移動

本節では、通過の有無にかかわらず円環・円盤ゾーン内及びゾーン間の3種類の起終点間平均距離を解析的に算出する：図5参照。最初に、円環ゾーン内でランダムに発生する二点間平均距離を求める。クロフトンの微分方程式(8)を用いるため、2節での計算(図1中央と右側参照)と同様に、(i) 起終点のどちらか一方が外周で発生す

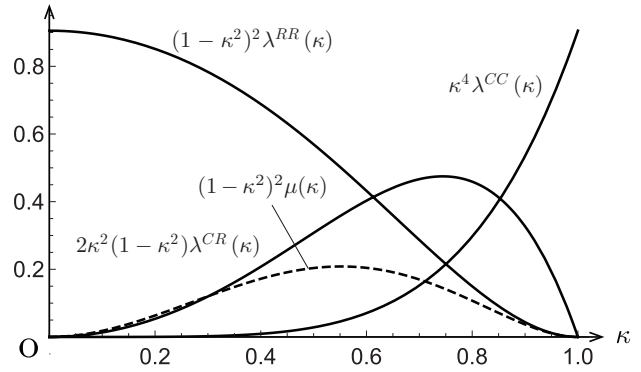


図 4: 半径比 κ と通過総距離との関係

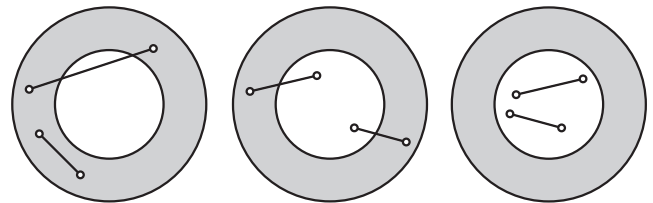


図 5: 3種類のトリップ

場合の平均距離 $\lambda_1(\kappa)$, (ii) 起終点ともに円環内で発生する場合の平均距離 $\lambda(\kappa)$, と二段階の移動パターンで導出する。

外周上に位置する点 P を起点とする総トリップ長から、円盤ゾーンを終点とする総トリップ長を取り除くことで、円環ゾーンへの総トリップ長を計算する。まず、点 P から円盤ゾーンへの方向は $0 \leq \theta \leq \arcsin \kappa$ に限定される。そして、図1右側から理解できるように、固定された角度 θ では、円環ゾーンを終点とするトリップ長は区間

$$\left[a(\cos \theta - \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \theta}), a(\cos \theta + \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \theta}) \right]$$

に含まれる。

これらのトリップを全体から取り除くことで、外周点 P を起点とする平均距離 $\lambda_1(\kappa)$ は次のように定式化できる：

$$\begin{aligned} \lambda_1(\kappa) &= \frac{2}{\pi(a^2 - b^2)} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a \cos \theta} \rho^2 d\rho d\theta \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\arcsin \kappa} \int_{a(\cos \theta - \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \theta})}^{a(\cos \theta + \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \theta})} \rho^2 d\rho d\theta \right) \\ &= \frac{2a^3}{3\pi(a^2 - b^2)} \left(8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta - \int_0^{\arcsin \kappa} (\cos \theta + \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \theta})^3 \right. \\ &\quad \left. - (\cos \theta - \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \theta})^3 d\theta \right) \\ &= \frac{2a}{3\pi(1 - \kappa^2)} \left(\frac{16}{3} + 8 \int_0^{\arcsin \kappa} \sin^2 \theta \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \theta} d\theta \right. \\ &\quad \left. - 2(3 + \kappa^2) \int_0^{\arcsin \kappa} \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \theta} d\theta \right) \end{aligned}$$

ここで、被積分関数の ρ^2 は極座標系によるヤコビアンと距離との積である。式 (3) 及び式 (4) を代入し整理すると、固定点 P から円環ゾーン全体までの平均距離 $\lambda_1(\kappa)$ が次のように求められる：

$$\lambda_1(\kappa) = \frac{4a}{9\pi(1-\kappa^2)^2} (8 - (1+7\kappa^2)E(\kappa) + (1-\kappa^2)(1+3\kappa^2)K(\kappa)). \quad (11)$$

式 (1) と同じく完全楕円積分の関数となる。

本研究の定式化は、円形都市が円盤ゾーンのみで構成 ($b = a$) と円環ゾーンのみで構成 ($b = 0$) を含むので、これらを確認する。式 (5)、式 (6)、式 (7) を駆使しロピタルの定理を適用することで、

$$\lambda_1(1) = \frac{4}{\pi}a, \quad \lambda_1(0) = \frac{32}{9\pi}a.$$

前者の結果はランダムな二点間弦長、後者は円周から円内へのランダム距離の期待値⁵⁾⁶⁾に一致する。

3.2 円環ゾーン内移動

次に、起終点がともに円環ゾーンとなるトリップについて、それら起終点間の直線距離の平均値 $\lambda(\kappa)$ を求める。通過交通の場合と地理的状況は同じであるので、クロフトンの微分方程式として、式 (8) が成り立つ。そこで、式 (11) で与えられた平均距離 $\lambda_1(\kappa)$ を、式 (8) に代入すると、

$$\begin{aligned} & \int a(a^2 - b^2)\lambda_1(\kappa)da \\ &= \frac{4b^5}{9\pi} \int \frac{-8 + (1+7\kappa^2)E(\kappa) - (1-\kappa^2)(1+3\kappa^2)K(\kappa)}{\kappa^6} d\kappa \\ &= \frac{4b^5}{9\pi} \left(3J_{-2} - 2J_{-4} - J_{-6} + 7I_{-4} + I_{-6} + \frac{8}{5}\kappa^{-5} \right) \\ &= \frac{4a^5}{45\pi} (-\kappa^4 + 14\kappa^2 + 1)E(\kappa) + (1-\kappa^2)(7\kappa^2 + 1)K(\kappa) + 8. \end{aligned}$$

この最終結果を式 (8) へ代入し積分定数 C を定めると、次のようになる：

$$C = \frac{128}{45\pi}b^5.$$

従って、円環ゾーン内の平均距離 $\lambda(\kappa)$ は式 (11) を用いることで次のように表現できる：

$$\begin{aligned} \lambda(\kappa) &= \frac{16}{45\pi(1-\kappa^2)^2} (8(1+\kappa^5) \\ &\quad - (1+14\kappa^2+\kappa^4)E(\kappa) \\ &\quad + (1-\kappa^2)(1+7\kappa^2)K(\kappa)) a. \quad (12) \end{aligned}$$

式 (10) と同様に、完全楕円積分の関数となる。

特別な場合として、円盤ゾーンのみの場合 ($b = a$) と円環ゾーンのみの場合 ($b = 0$) をロピタルの定理を用いて確認すると、

$$\lambda_1(1) = \frac{4}{\pi}a, \quad \lambda_1(0) = \frac{128}{45\pi}a.$$

後者は円内のランダム 2 点間距離の期待値⁴⁾⁵⁾⁶⁾となる。

3.3 円環ゾーン・円盤ゾーン間移動

ここでは、起点と終点とが異なるゾーンでランダムに発生するトリップの起終点間平均直線距離 $\lambda^{CR}(\kappa)$ を求める。

まず、半径 b の円盤ゾーン内を移動する場合の起終間の平均直線距離 $\lambda^{CC}(\kappa)$ は、次のようになる⁶⁾：

$$\lambda^{CC}(\kappa) = \frac{128\kappa}{45\pi}a. \quad (13)$$

次に、円環ゾーン内を移動するトリップの平均移動直線距離 $\lambda^{RR}(\kappa)$ は式 (12) で与えられる。

円形都市での起終点パターンは、円盤ゾーン内の移動、円環ゾーン内の移動、そして円盤ゾーンと円環ゾーンとの移動の 3 種類に限定される。それぞれの発生トリップ量の重みは、 $\kappa^4, (1-\kappa^2)^2, 2\kappa^2(1-\kappa^2)$ であることに留意し、円形都市全体で移動する場合の平均直線距離は、半径 a の円盤内の平均距離 $\frac{128}{45\pi}a$ と一致することから、

$$\begin{aligned} \frac{128}{45\pi}a &= \kappa^4\lambda^{CC}(\kappa) + 2\kappa^2(1-\kappa^2)\lambda^{CR}(\kappa) \\ &\quad + (1-\kappa^2)^2\lambda^{RR}(\kappa) \end{aligned}$$

を満たすことが確認できる。 $\lambda^{RR}(\kappa)$ に $\lambda(\kappa)$ を代入し、式 (12) を用いることで、 $\lambda^{CR}(\kappa)$ は

$$\begin{aligned} \lambda^{CR}(\kappa) &= \frac{8}{45\pi\kappa^2(1-\kappa^2)} \left((1+14\kappa^2+\kappa^4)E(\kappa) \right. \\ &\quad \left. - (1-\kappa^2)(1+7\kappa^2)K(\kappa) - 16\kappa^5 \right) a \quad (14) \end{aligned}$$

が得られる。円形都市が円盤ゾーンのみで構成される場合 ($b = a$) と円環ゾーンのみで構成される場合 ($b = 0$) を確認すると、

$$\lambda^{CR}(1) = \frac{32}{9\pi}a, \quad \lambda^{CR}(0) = \frac{2}{3}a,$$

長さ a で単調増加の三角分布の確率密度関数は、

$$\frac{2}{a^2}x, \quad (0 \leq x \leq a).$$

後者は三角分布の期待値 $\int_0^a (x \frac{2}{a^2}x) dx$ と一致する。

Fairthorne¹¹⁾¹²⁾ は、半径 a 及び $b(\leq a)$ の二つの重なる同心円間の平均距離 $\bar{\lambda}$ を確率密度関数から次のように求めた。

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &\equiv \frac{8}{45\pi\kappa^2} \left((1+14\kappa^2+\kappa^4)E(\kappa) \right. \\ &\quad \left. - (1-\kappa^2)(1+7\kappa^2)K(\kappa) \right) a. \end{aligned}$$

ここで、式 (13) 及び式 (14) から

$$\bar{\lambda} = \kappa^2\lambda^{CC}(\kappa) + (1-\kappa^2)\lambda^{CR}(\kappa)$$

が成り立つので、クロフトンの微分方程式から導いた式 (12) は Fairthorne の結果と整合している。なお、Fairthorne の結果¹¹⁾には誤植がある。

発生トリップで重み付けした総距離 $(1-\kappa^2)^2\lambda^{RR}(\kappa)$ 、 $2\kappa^2(1-\kappa^2)\lambda^{CR}(\kappa)$ 、 $\kappa^4\lambda^{CC}(\kappa)$ を半径比 κ の関数でグラフ化すると図 4 の実線のようなになる。半径比 κ が増えるにつれて円環ゾーンが狭くなり円盤ゾーンで起終点とともに発生するトリップの総距離 $(1-\kappa^2)^2\lambda^{RR}(\kappa)$ は単調減

少し、一方で円盤ゾーンで起終点がともに発生するトリップの総距離 $\kappa^4 \lambda^{CC}(\kappa)$ は単調増加する。また、円盤ゾーンと円環ゾーンを結ぶトリップの総距離 $2\kappa^2(1-\kappa^2)\lambda^{CR}(\kappa)$ は $\kappa \approx 0.75$ 付近で最大を達成する。

3.4 インフラ維持管理への応用

自動車交通により路面摩耗が発生し、その他にも清掃、安全点検、街路樹など道路維持管理費用が発生する。ここでは、そのような道路維持管理の負担を道路が存在する各ゾーンが担っているとしよう。つまり、各ゾーンがそれぞれの地域の道路維持管理の納税者になっている単純な状況を想定する。すると、円盤ゾーンの通過交通の発生により、外側の円環ゾーンは便益を享受するが、内側の円盤ゾーンはゾーン外交通のためにも維持管理費用を負担しなければならない。ここでは、中心都市と周辺都市という都市圏の状況や県庁所在都市と周辺市という状況を想定する。

負担規模を理解するために、通過交通量を相対化する。受益サイドの視点から $\alpha(\kappa)$ 、負担サイドの視点から $\beta(\kappa)$ を次のように計算する：

$$\alpha(\kappa) \equiv \frac{\mu(\kappa)}{\lambda^{RR}(\kappa)},$$

$$\beta(\kappa) \equiv \frac{(1-\kappa^2)^2 \mu(\kappa)}{\kappa^4 \lambda^{CC}(\kappa) + (1-\kappa^2) \kappa^2 \lambda^{CR}(\kappa)}.$$

$\alpha(\kappa)$ は通過交通の受益者である円環ゾーンの視点から、交通量全体の内どの程度フリーライドを享受できているのかを表す。一方で $\beta(\kappa)$ は道路維持管理費用を負担する円盤ゾーンの目線で発生交通量との比較により許しているフリーライドの相対度合いを示す。どちらの指標も高いほど、円盤ゾーン側の不満が高くなる。なお、通過交通総量 $\mu(\kappa)$ は交通総量 $\lambda^{RR}(\kappa)$ の内数であるから $\alpha(\kappa) \leq 1$ となる。これらの比 $\alpha(\kappa)$ 及び $\beta(\kappa)$ を、それぞれ半径比 κ の関数として図6にて点線及び実線で示す。この図から、半径比 κ が小さいときには $\beta(\kappa)$ が高く、逆に半径比 κ が大きいときには $\alpha(\kappa)$ が高い。このように、見方は違うが、円形都市で発生する通過交通では道路修繕などインフラ維持のためのコスト負担の問題の大きさを読み取れる。

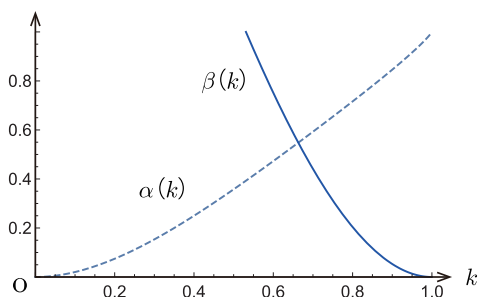


図6: 半径比 κ と通過交通両比との関係

4 おわりに

近年ではIoT車両情報¹³⁾を活用できる環境も整備されつつある。その結果、道路利用者が特定でき道路維持管理

のために受益者負担原則による課金も技術的には可能となる。このような時代背景を踏まえると、道路という公共サービスに対する納税負担の妥当性を検討する必要がある。本研究では、同心円地域という単純な状況での通過交通の分析を通して、自治体の費用負担のあり方を考える上での基礎理論を構築した。

従来、交通混雑、環境悪化、交通事故などから通過交通排除を求めて環状道路建設の意義が主張されてきた¹⁴⁾。近年注目されている自動運転は放射方向より環状方向の方が実装しやすい。これは、放射方向より交通量などの特性が安定していること、ガソリンや電気などの補給場所は円環であればどこでも無差別であり立地選択肢が多いことなどが理由である。環状道路整備の意義について、従来の視点や自動運転普及の視点に加え、本研究で示した受益者負担の観点でも議論が行われることを期待する。

謝辞

筑波大学名誉教授腰塚武志先生、慶應義塾大学栗田治先生から有意義なコメントを頂いた。なお、本研究は科学研究費補助金（基盤研究（A））、課題番号25242029）および、トヨタ自動車と筑波大学社会工学域との共同研究「次世代社会システムとモビリティの新価値研究」の補助を受けた。

参考文献

- 1) 奥平耕造 (1976) : 都市工学読本, 彰国社.
- 2) Vaughan, R.(1987): *Urban Spatial Traffic Patterns*, Pion.
- 3) Fujita, M.(1989): *Urban Economic Theory*, Cambridge University Press.
- 4) Kendall, M.G. and P.A.P. Moran(1963): *Geometrical Probability*. Charles Griffin And Company Limited.
- 5) 腰塚武志 (1986): 都市平面における距離の分布, 都市計画数理. 朝倉書店.
- 6) Mathai, A.M.(1999): *An Introduction to Geometrical Probability*. Gordon and Breach Science Publishers.
- 7) 栗田治 (2004): 都市モデル読本. 共立出版.
- 8) 栗田治 (2005) : 回転対称な起・終点分布の下での放射・環状距離分布 : Crofton の微分方程式の円盤への新しい応用例, 日本建築学会計画系論文集, 70(596), pp.93-100.
- 9) 四ッ谷晶二, 村井実 (2013) : 楕円積分と仲良くなろう, 日本評論社.
- 10) Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A. and O.I. Marichev(1986): *Integrals and Series, More Special Functions*, Gordon and Breach Science Publishers.
- 11) Fairthorne, D.(1964): The distance between random points in two concentric circles, *Biometrika*, 51, pp.275-277.
- 12) Fairthorne, D.(1965): The distance between pairs of points in towns of simple geometrical shapes. Proceedings of the 2nd International Symposium on the Theory of Road Traffic Flow, OECD, pp.391-406.
- 13) 高原勇 (2016): Society5.0におけるIoT車両情報の社会応用に向けて. オペレーションズリサーチ, 61(9), pp.582-588.
- 14) 川勝平太, 日経コンストラクション (2006) : 環状道路の時代, 日経 BP 社.