

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 28 年 6 月 23 日現在

機関番号：12102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2015

課題番号：25590051

研究課題名(和文) ベイズ理論を用いたMS-AIDSモデルの推定法・モデル選択法の提案とその応用

研究課題名(英文) A Bayesian Markov switching almost ideal demand systems model, model selection, and its applications

研究代表者

金澤 雄一郎 (KANAZAWA, Yuichiro)

筑波大学・システム情報系・教授

研究者番号：50233854

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：2002年にマルコフスイッチングを行うalmost ideal demand system (MS-AIDS)モデルを最尤法によって推定するAllais and Nicheleによる2007年の論文を応用した論文をApplied Economics Letters, 19に発表した。この応用を通じてこの手法の持つ多くの限界に直面し、MS-AIDSモデルをベイズ理論を用いて推定する手法を考案し、その理論的正確性をシミュレーションと応用可能性を現実データを用いて示し2014年にEmpirical Economicsに発表した。この手法は旧来の方法の限界を多くの面で克服している。

研究成果の概要(英文)：In 2012, we published a paper "Another view of impact of BSE crisis in Japanese meat market through the almost ideal demand system model with Markov switching" in Applied Economics Letters, 19, in which we applied a maximum likelihood estimation of a Markov-switching almost ideal demand system (MS-AIDS) model proposed by Allais and Nichele in 2007. Frustrated with many limitations associated with their method encountered in this paper, we went on to develop a Bayesian estimation for MS-AIDS model and illustrate applicability of our proposed method in simulation as well as in empirical study in a paper "Estimating the Markov-Switching Almost Ideal Demand Systems: A Bayesian Approach," published in Empirical Economics in 2014. Our proposed method overcomes many limitations associated with the method by Allais and Nichele. Notably our model is able to capture the regime shifts of meat demand coinciding with the timing of bovine spongiform encephalopathy (BSE) cases in Japan and US.

研究分野：計量経済学

キーワード：Bayesian estimation Markov switching AIDS model Maximum likelihood Hamilton filter Markov chain Monte Carlo Gibbs sampler Multi move sampler

### 1. 研究開始当初の背景

ブランド等によって差別化された財市場における合併の競争制限効果をみるためには、市場支配力が生じるか否かをみることが重要である。市場支配力とは企業が競争市場における価格水準以上に、すなわち限界費用以上に価格を上昇させることができる能力であると考えることができ、プライス・コスト・マージンが市場支配力を表す主な指標となる。同質財の寡占市場モデルとして、クールノー・ナッシュ・モデルを、また差別化された財の寡占市場で、ベルトラン・ナッシュ・モデルを取り上げると、企業のプライス・コスト・マージンは、それぞれ企業のマーケットシェアをその企業の需要の価格弾力性で割った値、および企業の需要の価格弾力性の逆数に等しいことが知られている。いずれの場合にも需要の価格弾力性が必要となる。この弾力性を推定するために必要となる需要関数の推定モデルとして現在最も受け入れられているモデルの一つが Deaton and Muellbauer (1980) の AIDS モデルであろう。

需要関数を推定する場合、市場によっては、外部からのショックによって財の需要が構造的に変化する可能性が考えられる。これらに対応すべく、たとえば Moosa and Baxter (2002) は Journal of Applied Econometrics において確率的トレンドと季節項を線形近似 AIDS モデルに導入し、UK におけるアルコール飲料の不安定な需要構造を明らかにした。Ishida et al. (2010) は Applied Economics において滑らかな市場シフトを取り扱うべく gradual switching AIDS model を提唱し、これを用いて BSE および鳥インフルエンザ後の日本の食肉市場における需要をモデル化した。後者のモデルは構造的変化点があらかじめわかっていることが必要になる。外部からのショックによるこのような構造変化点そのものをモデル自体が特定し、かつその前後の需要構造も同時に推定することができることがより望ましいので、Hamilton (1989) を参考に Allais and Nichele (2007) が複数のレジームからなる需要関数推定モデルである Markov-Switching AIDS (以降 MS-AIDS) モデルを提唱した。Kabe and Kanazawa (2012) は Applied Economics Letters において日本の食肉市場を対象に MS-AIDS モデルを推定した。

どちらの研究も最尤推定によって、レジーム間の推移確率とパラメータを推定しているが、1)分散・共分散行列の行列式がレジームごとに異なると尤度が発散し、数値的解法を用いることができなくなる点、2) レジーム間の推移確率が満たさなければならぬ[0,1]区間内という制約条件を用いずに推定していること、の問題を抱えている。

### 2. 研究の目的

需要の価格弾力性を推定するために必要となる需要関数の推定モデルとして現在最も受け入れられているモデルの一つが Deaton and Muellbauer (1980) の AIDS モデルである。本研究では 1) Allais and Nichele (2007) による複数のレジームからなる需要関数推定モデルである Markov-Switching AIDS モデルにおけるベイズ推定方法を確立し、2) Spiegelhalter et al. (2002) によって提唱された DIC ベイズモデル選択規準を Markov-Switching AIDS モデルに適用可能なように拡張し、この重要な分野の新たな解析手法を提供することを目的とする。

### 3. 研究の方法

いま時点  $t$  においてどのレジームにいるかを表す  $st$  は 1 から  $K$  までの自然数をとる観測できない確率変数である。以下(4)式までの合計 ( $\Sigma$ ) は財の数  $N$  までを合計したものである。時点  $t$  における  $i$  番目の財の価格を  $p_{ijt}$ 、量を  $q_{ijt}$ 、同時点における支出を  $m_{0t} = \Sigma_i p_{ijt} q_{ijt}$  とすると、MS-AIDS モデルにおけるバジェットシェア  $w_{it}$  は、以下のようにあらわされる。 $w_{it} = a_{i,st} + \Sigma_{j=1}^K y_{ij,st} \log p_{ijt} + \beta_{i,st} \log(m_{0t}/P_t)$  (1) ここで  $P_t$  は価格指数であり、以下のように定義される。

$$\log P_t = \alpha_{0,st} + \Sigma_{k=1}^K \alpha_{k,st} \log p_{kt} + (1/2) \Sigma_{k=1}^K \Sigma_{j=1}^K \gamma_{kj,st} \log p_{kt} \log p_{jt} \quad (2)$$

いま  $\alpha_{0,st}$ 、 $a_{i,st}$ 、 $y_{ij,st}$ 、 $\beta_{i,st}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, N$ ) はレジームに依存するパラメータである。これらのパラメータは以下の理論的な制約をみたすものとする。

$$[\text{総和条件}] : \Sigma_i a_{i,st} = 1, \Sigma_i y_{ij,st} = 0, \Sigma_i \beta_{i,st} = 0, \quad (3a)$$

$$[\text{同次性制約}] : \Sigma_j y_{ij,st} = 0, \quad (3b)$$

$$[\text{対称性制約}] : y_{ij,st} = y_{ji,st} \quad (3c)$$

Rickertsen (1996), Allais and Nichele (2007), Ishida et al., (2010) などの先行研究を参考に、トレンド効果 ( $v_{i,st}$ )、季節効果、過去のバジェットシェアに影響を受ける習慣効果を(1)式の切片項  $a_{i,st}$  に以下のような形で取り入れる。以下では日本の食肉市場のように8月と12月に季節調整ダミー二つ ( $d_{1,t}$ ;  $d_{2,t}$ ) が含まれた例をあげる。

$$a_{i,st} = a_{i,st} + v_{i,st} + \delta_{1,i} d_{1,t} + \delta_{2,i} d_{2,t} + \Sigma_{j=1}^K \phi_{ij} w_{j,t-1} \quad (4)$$

(3a)、(3b)、(3c) の制約条件を用いて(1)の MS-AIDS モデルは以下のように書き換えることができる。ただし(5)式の合計 ( $\Sigma$ ) は  $j=N-1$  までを合計したものである。

$$w_{it} = a_{i,st} + \Sigma_{j=1}^K y_{ij,st} \log(p_{ijt}/p_{Nt}) + \beta_{i,st} \log(m_{0t}/P_t) \quad (5)$$

ここで  $\Sigma_{j=1}^K \phi_{ij} = 0$  の制約条件をいれることにより(2.5)の  $a_{i,st}$  は以下のように表現される。

$$a_{i,st} = a_{i,st} + v_{i,st} + \delta_{1,i} d_{1,t} + \delta_{2,i} d_{2,t} + \Sigma_{j=1}^K$$

$$\phi_{ij}(w_j, t-1 - wN, t-1)$$

Markov switching mechanism を表現するために、レジーム間の遷移は  $K$  次マルコフ連鎖にしたがうものとし、遷移確率は以下で表現される。

$$Pr(st = j | st-1 = i) = \pi_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, K \quad (6)$$

$w_t$  を時点  $t$  におけるバジェットシェア  $w_t (i = 1, 2, \dots, N-1)$  の  $(N-1) \times 1$  のベクトル、レジーム依存パラメータ  $\alpha_{i,s,t}, \gamma_{1,s,t}, \gamma_{2,S,t}, \dots, \gamma_{N-1,S,t}, \beta_{i,s,t}, v_{i,s,t}$  を  $X(1)$ 、レジーム独立パラメータ  $\delta_{1,i}, \delta_{2,i}, \phi_{i1}, \phi_{i2}, \dots, \phi_{i,N-1}$  を  $X(0)$  とすると (5) 式は以下のように整理される。

$$w_t = X(1)'t \theta_{st} + X(0)'t \theta_0 + \epsilon_t \quad (7)$$

ただし  $\epsilon_t \sim N(0, \Sigma_{st})$ 、また  $\Sigma_{st}$  はレジーム依存パラメータである。時点  $t$  でレジーム  $j$  に所属するのであれば  $\Sigma_{st} = \Sigma_j$  となる。MS-AIDS モデルは (2) にみられるように価格指数に依存し、非線形にパラメータ化されているので、閉じた形で書くことはできない。その代わりに価格指数を既知と仮定して Gibbs sampler を用いてパラメータの標本を抽出し、次にこれらのパラメータ標本を用いてこの価格指数を再計算し、これを収束するまで繰り返す。

MS-AIDS モデルの尤度を計算するために、以下のように標記する。

$$Y_t \equiv \{w_1, w_2, \dots, w_t\}, S_t \equiv \{s_1, s_2, \dots, s_t\}, X_t \equiv \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$$

ただし  $x_t$  は (7) 式にある時点  $t$  における  $1 \times (2N+3)$  の説明変数ベクトルである。これを用いて尤度は

$$L(\theta, \pi | Y_T, S_T, X_T) = L(\pi | S_T) \cdot L(\theta | Y_T, S_T, X_T) \quad (8)$$

ただし  $\theta \equiv \{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_K\}$  および  $\pi \equiv \{\pi_{ij} : i, j = 1, 2, \dots, K\}$  となる。事前分布を  $p(\theta, \pi) = p(\theta)p(\pi)$  とおくと、 $\theta$  および  $\pi$  に関する事後分布は

$$p(\theta, \pi | Y_T, S_T, X_T) \propto L(\theta, \pi | Y_T, S_T, X_T) p(\theta, \pi) = L(\pi | S_T) p(\pi) \times L(\theta | Y_T, S_T, X_T) p(\theta) \quad (9)$$

したがって (9) 式の各部分を計算してゆくことになる。このための最大の障壁となるのがレジームを表す離散潜在変数  $s_1, s_2, \dots, s_T$  の生成である。ここで Carter and Kohn (1994)、Chib (1996) の multi-move sampler を適用する。この際に Hamilton filter を用いて  $Pr(st | st+1, \{Y_t, X_t\}, \{\theta, \pi\})$  を計算する。

#### 4. 研究成果

2002 年にマルコフスイッチングを行う almost ideal demand system (MS-AIDS) モデルを最尤法によって推定する Allais and Nichele による 2007 年の論文を応用した論文 "Another view of impact of BSE crisis in

Japanese meat market through the almost ideal demand system model with Markov switching" を Applied Economics Letters, 19 に発表した。この応用を通じてこの手法の持つ多くの限界に直面し、ベイズ理論を用いて MS-AIDS モデルを推定する手法を考案し、その理論的正確性をシミュレーションで応用可能性を現実データを用いて、示したのが 2014 年に Empirical Economics に発表した "Estimating the Markov-Switching Almost Ideal Demand Systems: A Bayesian Approach," である。この方法は Allais and Nichele による方法の持つ多くの限界を克服している。結果として日本とアメリカ合衆国でしばらく時間を置いて起こった狂牛病 (BSE, bovine spongiform encephalopathy) によって日本の消費者が完全に新しい消費レジームへと移行してゆく姿を適切にとらえることができた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

1. Nishida, K. and Kanazawa Y. (2015) On Variance-Stabilizing Multivariate Nonparametric Regression Estimation. Communications in Statistics - Theory and Method, DOI:10.1007/s00181-013-0777-3, Vol.44(10): 2151-2175. 0.274 Impact Factor in 2014. 査読有
2. Kabe, S. and Kanazawa Y. (2014) Variable Selection in a Bayesian Linear Regression Model via Generalized Bayesian Information Criterion, Department of Social Systems and Management Discussion Paper Series, No.1316: 1-28. 査読無
3. Kabe, S. and Kanazawa Y. (2014) Estimating the Markov-Switching Almost Ideal Demand Systems: A Bayesian Approach. Empirical Economics, DOI:10.1080/03610926.2013.775298. Vol.47(4): 1193-1220. 0.693 Impact Factor in 2014. 査読有

[学会発表](計 16 件)

1. "CAN properties of the regional BLP (1995) estimator in the presence of national micro moments: A simulation study," 第 17 回ノンパラメトリック統計解析とベイズ統計 慶應義塾大学三田キャンパス (東京都) 2016 年 3 月 29 日 ~ 30 日 (発表者 Kanazawa Y.)
2. "CAN properties of the regional BLP (1995) estimator in the presence of

- national micro moments: A simulation study,” RIMS 共同研究による研究会 “Statistical Inference on Divergence Measures and Its Related Topics” 京都大学数理解析研究所（京都府）2016年3月7日～9日(発表者 [Kanazawa Y.](#))
3. “CAN properties of the regional BLP (1995) estimator in the presence of national micro moments: A simulation study,” 9<sup>th</sup> International Conference on Computational and Financial Econometrics, Gordon, Senate House, University of London, UK, December 12-14, 2015(発表者 [Kanazawa Y.](#))
  4. “Evaluating the Effects of the Rehabilitative Program for Sex Offenders in Japanese Prisons,” 71st Annual Meeting of the American Society of Criminology, Washington Hilton, Washington D.C., USA, November 20th, 2015(発表者 [Kanazawa Y.](#))
  5. “Are manufacturers’ efforts to improve their brands’ reputation really rewarded? The case of Japanese yogurt market,” 2015 INFORMS Marketing Science Conference, Baltimore Marriott Waterfront Hotel, Maryland, USA. June 17-20, 2015. (発表者 [Kanazawa Y.](#))
  6. “Proposing a multidimensional model of continuance organizational commitment in a context of Japanese female nurses,” Association for Psychological Science 27th Annual Convention, Marriott Marquis, New York City, New York, USA, May 24th, 2015 (発表者 [Kanazawa Y.](#))
  7. “Are manufacturers’ efforts to improve their brands’ reputation really rewarded? The case of Japanese yogurt market,” 第16回ノンパラメトリック統計解析とベイズ統計 慶應義塾大学日吉キャンパス(神奈川県)2016年3月25日～26日(発表者 [Kanazawa Y.](#))
  8. “Are manufacturers’ efforts to improve their brands’ reputation really rewarded? The case of Japanese yogurt market,” RIMS 共同研究による研究会 “New Advances in Statistical Inference and Its Related Topics” 京都大学数理解析研究所（京都府）2015年3月11日(発表者 [Kanazawa Y.](#))
  9. “Estimating the Markov-Switching Almost Ideal Demand Systems: A Bayesian approach,” ISBA-George Box Research Workshop on Frontiers of Statistics, The George Washington University, Washington D.C., USA May 21, 2015 (発表者 [Kanazawa Y.](#))
  10. “Variable Selection for a Small Sample Bayesian Linear Regression Model via Generalized Bayesian Information Criterion,” International Society for Bayesian Analysis World Meeting, Cancun, Mexico, July 16th, 2014 (発表者 [Kanazawa Y.](#))
  11. “When nurses become emotionally attached to hospitals: Roles of trust and job satisfaction,” Association for Psychological Science 26th Annual Convention, The Hilton San Francisco Union Square, San Francisco, California, USA, May 25th, 2014 (発表者 [Kanazawa Y.](#))
  12. “Estimating the Markov-Switching Almost Ideal Demand Systems: A Bayesian approach,” 第15回ノンパラメトリック統計解析とベイズ統計 慶應義塾大学三田キャンパス（東京都）2014年3月19日(発表者 [Kanazawa Y.](#))
  13. “Estimating the Markov-Switching Almost Ideal Demand Systems: A Bayesian approach,” RIMS 共同研究による研究会 “Asymptotic Statistics and Its Related Topics” 京都大学数理解析研究所（京都府）2014年3月5日(発表者 [Kanazawa Y.](#))
  14. “Estimating the Markov-Switching Almost Ideal Demand Systems: A Bayesian approach,” EFaB@Bayes 250, Fuqua Business School, Duke University, USA December 16, 2013 (発表者 [Kanazawa Y.](#))
  15. “On the Effect of Psychological Treatments on Japanese Female Prisoners’ Rule-breaking Behaviors,” 69th Annual Meeting of the American Society of Criminology, ATLANTA MARRIOTT MARQUIS, Atlanta, Georgia, USA, November 22nd, 2013 (発表者 [Kanazawa Y.](#))
  16. “The effect of students’ future image on high school dropouts in US,” Association for Psychological Science 25th Annual Convention, Washington Hilton, Washington D.C., USA, May 26th, 2013 (発表者 [Kanazawa Y.](#))
6. 研究組織  
 (1)研究代表者 金澤 雄一郎 (Yuichiro KANAZAWA )  
 筑波大学・システム情報系・教授  
 研究者番号：50233854