様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2015
課題番号：２４５４０１６１

研究課題名（和文）偏微分方程式に対するウェーブレット理論の発展とその数値解析的応用

研究課題名（英文）The development of the wavelet theory for partial differential equations and its numerical analysis application

研究代表者
木下　保（Kinoshita, Tamotu）

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：９０３０１０７７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：ウェーブレットの理論面では、実用的なウェーブレット、および無条件収束性に関する興味深い反例なども構成し、十分な成果が得られた。偏微分方程式論についても、２階の波動タイプの微分方程式に対する解の表示に関する有益な公式を導出するのに成功した。ウェーブレット論と偏微分方程式論における個々の結果としては、大変意義のある研究成果を上げることができたと言える。また、ウェーブレット論と偏微分方程式論の両者の理論を融合し、ある微分方程式に対する初期値問題の適切性と係数の振動との関係をウェーブレット変換で視覚化した研究成果も上げることができたが、改善の余地が有り、今後の研究課題になると思われる。

研究成果の概要（英文）：As for the wavelet theory, we could find some practical wavelets and construct an interesting counter example concerned with the unconditional convergence of wavelet expansions. As for the partial differential equations theory, we succeeded to get the very useful representation formula of the solutions to the Cauchy problem for the second order wave type equations. These research results are sufficiently satisfactory as an each result in the wavelet theory and the partial differential equations theory. Combining the partial differential equations theory with the wavelet theory, we also obtained a result concerned with the relations between the wellposedness and the oscillations of the coefficients by visualizing with the wavelet transform. This seems to be still scope for improvement and will become the research subject in the future.

研究分野：解析学

キーワード：関数方程式論　ウェーブレット　数値解析

１．研究開始当初の背景

(1)ウェーブレット解析の背景：ウェーブレットとは、関数を表現するのに平行移動と伸縮だけを操作する基底である。よく知られたフーリエ解析では（大域的な波である）三角関数の重ね合わせで関数を表現するが、中心のない三角関数を用いて位置情報を得るのは大変難しい。この弱点を補う解析手法として開発されたのがウェーブレットの起源である。ウェーブレット解析は、１９８０年代初めに地球物理学のMorlet氏によって石油探査および地震波の研究の中で初めて登場し、その後多くの学問的分野（量子力学、計算生物学、信号処理等）に、幅広く応用されている魅力的な研究分野である。

(2)偏微分方程式の背景：偏微分方程式論では、変数係数を持つ方程式の解の性質（滑らかさや増大度等）に関する研究がよくなされてきた。一般に変数係数を持つ偏微分方程式の厳密解を具体的に求めることは、非常に困難とされている。理論的な立場から近似解の構成法もある程度は可能だが、無限回の重積分を含むような効率性を度外視した手法であることが多い。

各研究成果に対する詳しい研究背景については、この後の「4.研究成果」で説明する。

２．研究の目的

変数係数をもつ偏微分方程式の解を構成するのが目的である。

(1)近似解をウェーブレット基底で表現したい。ウェーブレットの伸縮操作は解像度を表しており、近似解の精度と対応させることができるので、有効である。

(2)波動タイプの微分方程式に関して、係数が時間のみに依存する場合の厳密解の公式が幾つか知られているが、係数が空間に依存する場合の厳密解も与える有益な公式を導出することを目指す。

３．研究の方法

(1)ウェーブレット理論の発展のため、連携研究者と研究打合せを行い、国内における研究集会や談話会を開催した。また、微分方程式に対する数値解析に詳しい研究分担者と共同研究を行った。

(2)　偏微分方程式の中でも双曲型に重点をおいた。国内の研究分担者のみならず、海外の研究協力者と研究打ち合わせを十分に行った。特に、厳密解に関して詳しいTexas大学のGalstian氏と共同研究を進めた。

４．研究成果

この後の「５.主な発表論文等」における論文の番号を用いて説明する。

(1)数値解析の手法としてよく知られている有限要素法では通常ハット関数が用いられている。論文⑥でウェーブレットを改良したある種のリース基底を用いて、数値解析的な応用として微分方程式の近似解の求めた。その際、数値解析的に意義のある高階の差分に関するいくつかの公式も導出することができた。また、２階の波動タイプの微分方程式に対する厳密解の表示に関する有益な公式を導出するのに成功した。この結果に関する論文は、現在投稿中である。

(2)ウェーブレット変換というのは、与えられた関数に対して時間空間と周波数空間に分解し、特徴を捕らえるための変換であるとみなせる。従って、時間空間と周波数空間に対して同時にその減衰度と滑らかさを指定する関数空間が望ましいとされる。また、一般に偏微分方程式論の立場から、双曲型方程式をGevreyクラスにおける解の適切性がよく研究されているが、その近似解を構成する場合、Gevreyクラスに属するウェーブレットが最も有効であろうと考えられる。論文⑤では、離散ウェーブレットに関して、時間空間と周波数空間の両方においてGevreyクラスに属するウェーブレットの構成に成功した。さらに、最終年度（２７年度）には、より一般的な関数空間であるゲルファンド・シーロフ空間における連続ウェーブレット変換（および逆連続ウェーブレット変換）の有界性に関する評価と、またその最適性を示す興味深い具体例の構成に成功した。この結果は、現在論文にまとめ、準備をしている。

(3)帯域制限ウェーブレットの最も有名な例として、シャノンウェーブレットが非常によく知られている。その帯域制限の幅を拡げる目的で、ローパスフィルタに対する新たな条件を発見することに成功した。論文③でこれまで知られているどの帯域制限ウェーブレットよりも周波数空間におけるサポートが大きく、そのローパスフィルタのサポートを限界まで延長したウェーブレットを構成した。この新しいウェーブレットによって、シャノンウェーブレットの応用と類似した関数の展開公式が得られるのは非常に有益である。また、楕円型方程式の数値解析を扱う際は、解析的な関数を用いたウェーブレットが有効であると考えられるが、ここで得られた帯域制限ウェーブレットはまさに解析的なクラスに属するウェーブ　レットでもあるので、今後の応用も期待される。

(4)振動する係数を持つ2階の弱双曲型方程式に対して、その初期値問題のwellposednessとill-posednessの両方の結果を示すことができた。これまでの係数の振動に関する条件は、強双曲型と弱双曲型を区別することなく、係数の導関数の絶対値の大きさによって与

えられてきた。そのような条件のもとで強双曲型に対してはキレイな結果が得られたが、弱双曲型に対してはいくぶん煩雑な結果しか得られてこなかった。論文②では退化の度合いを上手く組み込んだ新しいタイプの係数の振動に関する条件を提案し、弱双曲型に対してもwellposednessのキレイな結果を得ることができた。また、論文②と④では、ｉｌｌ-posednessとなる係数を具体的関数を構成し、さらにその関数に対して、連続ウェーブレット変換と短時間(窓)フーリエ変換を施すことで、wellposednessを打ち破るような係数の振動の状態をビジュアル化することができた。

(5)　関数をウェーブレット展開したときに、数値解析的にも収束の安定性が大いに問題となる。無限和がその順序と無関係に収束するときを、無条件収束と呼ばれる。ところが、ウェーブレット展開においても扱う関数空間によっては、無条件収束が一般に期待できない場合が生じてしまう。論文⑦で詳しく調べたストロンベルグウェーブレットを用いて、論文①では、無条件収束しない具体的な関数の例を構成することに成功した。特に、連続関数に制限してもそのような反例が存在することは大変興味深いと思われる。また、ストロンベルグウェーブレットを用いて、全ての点で微分できない病的な関数ともいえる高木関数を表現することができた（つまり、係数の具体的な値を正確に求めた）。さらに、高木関数を含むある種のカオス的な力学系から構成される関数に対して、微分可能性に関する詳しい条件を調べたり、積分値などを求めることができた。この結果に関する論文は、現在投稿中である。

以上のように、ウェーブレット論と偏微分方程式論における個々の結果としては、大変意義のある研究成果を十分に上げることができたと言える。ウェーブレット論と偏微分方程式論の両者の理論を融合した結果に関しては改善の余地が有り、今後の研究課題になると思われる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計7件）

① N. Fukuda, T. Kinoshita, and T. Suzuki, On the unconditional convergence of wavelet expansions for continuous functions, Intl. J. of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, vol 14, (2016), 1650007. 査読有, DOI 10.1142/S0219691316500077

② T. Kinoshita, On second order weakly hyperbolic equations with oscillating coefficients, Differential and Integral Equations, vol 28, (2015), 581-600. 査読有.

③ N. Fukuda, T. Kinoshita, and I. Uehara, On the construction of band-limited wavelets with the Prouhet–Thue–Morse sequence, Applied and Computational Harmonic Analysis, vol 38, (2015), 385-398. 査読有. DOI 10.1016/j.acha.2014.05.003

④ N. Fukuda, T. Kinoshita, On a coefficient concerning an ill-posed Cauchy problem and the singularity detection with the wavelet transform, Rend. Instit. Mat. Univ. Trieste, vol 45, (2014), 97-121. 査読有.

⑤ N. Fukuda, T. Kinoshita, and I. Uehara, On the wavelets having Gevrey regularities and subexponential decays, Math. Nachr., vol 287, (2014), 546-560. 査読有. DOI 10.1002/mana.201300033

⑥ N. Fukuda, T. Kinoshita, and T. Kubo, On the Galerkin-wavelet method for higher order differential equations, Bulletin of the Korean Mathematical Society, vol 50, No. 3, (2013), 963-982. 査読有.

⑦ N. Fukuda and T. Kinoshita, On non-symmetric orthogonal spline wavelets, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, vol 36, (2012), 319-342. 査読有.

〔学会発表〕（計10件）

① 木下保, GelFand-Shilov空間におけるウェーブレット変換について, 日本応用数理学会, 2016年3月5日,　神戸学院大学（兵庫県神戸市）

② 木下保, 離散ウェーブレット展開の無条件収束性について１、２, 武蔵野偏微分方程式研究集会, 2015年10月10日, 日本医科大学（東京都武蔵野市）

③ 木下保, 連続関数のウェーブレット展開に関する無条件収束性, ウェーブレット解析の研究集会, 2014年11月5日, 京都大学（京都府京都市）

④ 木下保, On the construction of band-limited wavelets with the Prouhet-Thue-Morse sequence, 偏微分方程式の研究集会,　2014年10月12日, 北海道教育大学釧路校（北海道釧路市）

⑤ 木下保, Some applications of wavelet analysis for hyperbolic equations, 偏微分方程式の国際研究集会, 2013年11月22日, 京都大学（京都府京都市）

⑥ 木下保, On the wavelet-Galerkin method with the symplectic structure for Hamiltonian systems, 偏微分方程式の研究集会, 2013年10月12日, 九州情報大学（福岡県太宰府市）

⑦ 木下保, On the wavelets having Gevrey regularities and subexponential decays, 調和解析の国際研究集会, 2012年11月18日, 首都大学東京（東京都八王子市）

⑧ 木下保, 無限回微分可能で指数的な減少度をもたないウェーブレットの限界について,
ウェーブレット研究部会セミナー, 2012年11月9日, 大阪教育大学（大阪府柏原市）

⑨ 木下保, 関数解析とウェーブレットの基礎,

ウェーブレット研究部会セミナー, 2012年11月7日〜10日,　　大阪教育大学（大阪府柏原市）
⑩ 木下保, On the Wavelets Having Gevrey Regularities and Subexponential Decays, 偏微分方程式の研究集会, 2012年10月6日, 函館未来大学（北海道函館市）

〔図書〕（計　０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０件）

○取得状況（計　０件）

６．研究組織
(1)研究代表者
木下 保 (KINOSHITA, Tamotu)
筑波大学・数理物質系・准教授
研究者番号: 90301077

(2)研究分担者
梶谷 邦彦 (KAJITANI, Kunihiko)
筑波大学・　・名誉教授
研究者番号: 00026262

石渡 聡 (ISHIWATA, Satoshi)
山形大学・理学部・准教授
研究者番号: 70375393

久保 隆徹 (KUBO, Takayuki)
筑波大学・数理物質系・講師
研究者番号: 90424811

(3)連携研究者
芦野 隆一 (ASHINO, Ryuichi)
大阪教育大学・教育学部・教授
研究者番号: 80249490