

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 23 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23340022

研究課題名(和文) 統計的推測における非正則構造の解明とその応用

研究課題名(英文) The clarification of non-regular structure in statistical inference and its applications

研究代表者

赤平 昌文 (Akahira, Masafumi)

筑波大学・ 名誉教授

研究者番号：70017424

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 14,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究において、正則条件が必ずしも成り立たないような非正則の場合に、推定量の高次漸近展開の観点から非正則な推測構造の解明を目指した。特に、非正則分布族の典型である片側、両側切断指数分布族の自然母数、切断母数の推定問題を考えた。切断母数を局外母数とするときに自然母数の推定において、切断母数が既知のときの自然母数の最尤推定量、切断母数が未知のときの自然母数の補正最尤推定量の漸近展開を用いて、それらの2次の漸近分散を求め、前者に対する後者の2次の漸近損失も得た。また、自然母数を局外母数とするときに切断母数の最尤推定についても考察した。その結果から推測における非正則構造が明らかになった。

研究成果の概要(英文)：In the research, in the non-regular case when regularity conditions do not necessarily hold, the aim was to clarify the non-regular inferential structure from the viewpoint of higher order asymptotic expansion. For a one-/two-sided truncated exponential family of distributions as a typical non-regular family, an estimation problem on a natural/truncation parameter was considered. In the estimation of a natural parameter when a truncation parameter was a nuisance one, the asymptotic expansions of the maximum likelihood estimator (MLE)(0) of a natural parameter when a truncation parameter was known and the bias-adjusted MLE(1) of a natural parameter when a truncation parameter was unknown were derived, their asymptotic variances were obtained, and the second order asymptotic loss of MLE(1) relative to MLE(0) was given. The MLE of a truncation parameter when a natural parameter was a nuisance one was also considered. From the result the non-regular structure was clarified.

研究分野：数理統計学

キーワード：切断分布族 最尤推定 漸近展開 漸近損失

1. 研究開始当初の背景

正則条件が必ずしも成り立たないような非正則の場合には、正則な場合とは異なる結果が得られることが多い。従来、非正則分布の典型として切断分布が取り扱われ、切断点のような非正則部分のもたらす情報を把握し、それを統計量に取り込むことによって、高次まで漸近的に十分な性質を持つことを示してきた。そして、そのような統計量に基づいて高次まで漸近有効な推定量を構成した。実際、両側切断分布族の位置母数の推定問題において Pitman 推定量 (最良位置共変推定量) の漸近展開を導出し、その漸近分散を求め、さらに切断点での密度の値による荷重推定量の漸近分布による漸近分散の比較も行った。また、同じ分布族で極値統計量は 1 次の漸近情報量損失は 0 になるが、2 次の漸近情報量は正值になることが分かり、さらに極値統計量と漸近補助統計量の組から成る統計量の 2 次の漸近情報量損失が 0 になることも示した。

下側切断分布の典型としてパレート分布が知られているが、これはファイナンス、物理学、水文学、地質学、天文学等の様々な分野において広く用いられている重要な分布で、母数推定に関しても多くの文献がある (Johnson et al. (1994), Arnold (2015))。従来、パレート分布を含む、切断母数と自然母数をもつ下側切断指数型分布族において切断母数を局外母数として大きさ n の無作為標本に基づく自然母数の推定問題が論じられた。実際、切断母数が既知のときの自然母数の最尤推定量、切断母数が未知のときの自然母数の最大条件付尤度推定量が同じ漸近正規分布をもつことが知られている (Bar-Lev (1984))。なお、漸近展開を用いて同様の結果も得られている (Akahira and Ohyauchi (2012))。しかし、局外母数が未知の場合には既知の場合とは違って自然母数の推定に影響はあるはずで、そうでなければ局外母数の存在意義が失われてしまうという疑問が湧いた。そのためには 1 次のオーダーでは不十分で 2 次のオーダーまで漸近的に考える必要がある。また、最近、指数母数と局外母数として 2 つの切断母数をもつ上側切断パレート分布の指数母数の推定問題において、切断母数が既知のときの最尤推定量と、切断母数が未知のときの最尤推定量が漸近正規性をもち漸近分散は同じであるが、漸近分散は異なると主張されている (Aban et al. (2006))。これについても、片側指数型分布族の場合と同様に、同じ漸近分散をもつのではないかと推測される。

2. 研究の目的

非正則の場合には、正則な場合とは異なる結果が得られているものの未解決の問題が残されている。そこで、本研究において高次漸近展開の観点から、推測における非正則構造のもたらす情報を把握し、それを統計量に

取り込むことによって、高次まで漸近的に十分な性質を持つことができることを示す。また、非正則分布族の典型である片側、両側切断指数型分布族は応用上、重要な (上側切断) パレート分布を含み、切断母数が既知であれば、正則分布族になり、それが未知であれば非正則分布族になるため正則と非正則の双方の性質をもっているため、母数推定にも双方の影響を与えると考えられる。このような正則と非正則の橋渡しとして重要な役割を果たす好都合な分布族を対象にして非正則な推測構造の解明を目指す。

3. 研究の方法

切断指数型分布族の母数の推定においては、最尤法が極めて有用であるが、切断母数の最尤推定量は尤度方程式の解の形では表現できないし、大きさ n の無作為標本に基づく推定量の一致性のオーダーは n である。これに比して自然母数の尤度方程式の解として求められる自然母数の最尤推定量の一致性のオーダーは n の平方根であるため、切断母数が局外母数で未知のときの自然母数の最尤推定を行う際には、一致性のオーダーを含めて注意深く配慮する必要がある。最尤推定量の漸近展開を導出して漸近分散を求めるが、推定量の漸近比較の際には、予め偏り補正をしておく必要があり、推定量の漸近評価には 2 次の漸近損失を適切に定義することも重要になり、これらのことを踏まえて非正則な推測構造の解明の研究を進める。

4. 研究成果

まず、Pitman 推定量の漸近展開を用いてその漸近分布を求め、また極値統計量から成る荷重推定量の漸近分布も求めることができるので、それらの推定量の漸近集中確率を求めて比較したところ Pitman 推定量は荷重推定量より漸近的に一樣に良いとは限らないことが分かった。

次に、切断指数型分布族の自然母数の最尤推定問題に取り組んだ。局外母数として切断母数 θ をもち自然母数 λ と下側切断母数 α をもち切断指数型分布族 $P(\lambda, \alpha, \theta)$ において θ を局外母数として、 λ が既知のときの α の最尤推定量、 α が未知のときの λ の最尤推定量と最大条件付尤度推定量が同じ漸近正規分布をもつことは知られているが、2 次のオーダーでは差異が生ずるのではないかと予想される。それを解明するために高次の漸近展開の観点から研究を進めたところ、分布族 $P(\lambda, \alpha, \theta)$ において、 λ が未知のときの α の最尤推定量と最大条件付尤度推定量は 2 次のオーダーまで漸近的に同等であるが、 α が既知のときの λ の最尤推定量より 2 次のオーダーでは悪くなることを示すことができ、それらの 2 次の漸近分散の差による漸近損失量も求めることができた。そして、具体的に下側切断指数分布、下側切断正規分布の場合に、 λ が既知のときの α の最尤推定量に対する

が未知のときの の最尤推定量と最大条件付尤度推定量の漸近損失量を求めた。特に、実際の問題において重要で頻出するパレート分布は切断指数型分布の1つと考えられるが、この分布は対数変換を適用することによって下側切断指数分布の場合に帰着されることが分かった。

逆に、 を局外母数としての推定問題を考えた。まず、 が既知のときの の補正 MLE()と が未知のときの の補正 MLE()の漸近展開を2次のオーダーまで導出した。そして、補正 MLE()と補正 MLE()は1次の漸近分散が等しいという意味で1次のオーダーでは漸近的に同等であることが分かった。さらに、MLE()と MLE()の2次の漸近分散を求めて比較すると補正 MLE()は補正 MLE()より2次の分散が大きくなり、補正 MLE()に対する補正 MLE()の2次の漸近損失が求められた。なお、自然母数 と上側切断母数 をもつ切断指数型分布族において、 を局外母数として上側切断母数 の推定問題についても、適当な変数変換によって下側切断母数の推定問題に帰着できることも分かった。

さらに、自然母数、下側切断母数、上側切断母数 をもつ両側切断指数型分布族 $P(\theta, \eta, \xi)$ において、 を局外母数として上側切断母数 の推定問題を考えた。まず、 が既知のときの上側切断母数 の補正 MLE()と、 が未知のときの補正 MLE()の漸近展開を2次のオーダーまで導出した。そして補正 MLE()と補正 MLE()の1次の漸近分散が等しいという意味で1次のオーダーでは漸近的に同等であることを示した。また、補正 MLE()と補正 MLE()の2次の漸近分散を求めて比較すると補正 MLE()は補正 MLE()より2次の漸近分散が大きくなること分かり、補正 MLE()に対する補正 MLE()の2次の漸近損失も求めた。さらに分布族 $P(\theta, \eta, \xi)$ において、自然母数は未知で下側切断母数 が既知のときの上側切断母数 の補正 MLE()の補正 MLE()に対する2次の漸近損失も求めた。例として切断指数分布、切断パレート分布、切断正規分布を挙げた。

2次の漸近損失は、切断指数型分布族を特徴付ける関数 $u(X)$ の平均と切断母数の値での $u(\cdot)$ の値との差の2乗に対する $u(X)$ の分散の比として表現されることが分かった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計16件)

¹ Akahira, M. (2016). Second-order asymptotic comparison of the MLE and MLE of a natural parameter for a truncated exponential family of distributions. Ann.

Inst. Statist. Math., 68, 469 - 490, 査読有, DOI 10.1007/s10463-014-0502-9

² 橋本真太郎・小池健一(2015). Reference prior based on general divergence for multi-parameter non-regular models. 京都大学 数理解析研究所講究録 1954, 125 - 133, 査読無, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1954-12.pdf>

³ Akahira, M. (2015). Asymptotic comparison in maximum likelihood estimation of a natural parameter up to the second order for a truncated exponential family of distributions. 京都大学 数理解析研究所講究録 1954, 134 - 150, 査読無, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1954-13.pdf>

⁴ Akahira, M., Ohyauchi, N. (2015). Second order asymptotic loss of the MLE of a truncation parameter for a truncated exponential family of distributions. Mathematical Research Note 2015 - 001, Inst. of Math., Univ. of Tsukuba, 1- 15, 査読無

⁵ Ishii, A., Yata, K., Aoshima, M. (2014). Largest eigenvalue estimation for high-dimension, low-sample-size data and its application. 京都大学 数理解析研究所講究録 1910, 115 - 124, 査読無, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1910-08.pdf>

⁶ 赤平昌文・小池健一 (2014). The generalized amount of information between the prior distribution and the asymptotic posterior one. 京都大学 数理解析研究所講究録 1910, 144 - 153, 査読無, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1910-11.pdf>

⁷ 大谷内奈穂・赤平昌文 (2014). Second order asymptotic behaviour of location equivariant estimators for a family of truncated distributions. 京都大学 数理解析研究所講究録 1910, 102 - 114, 査読無, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1910-07.pdf>

⁸ 青嶋 誠・矢田和善 (2013). 高次元小標本における統計的推測. 数学 65, 225 - 247, 査読有.

⁹ 矢田和善・青嶋 誠 (2013). On the distribution of the largest eigenvalue in high dimension, low sample size context. 京都大学 数理解析研究所講究録 1860, 120 - 128, 査読無, <http://hdl.handle.net/2433/195290>

¹⁰ 橋本真太郎・小池健一 (2013). ベイズリスクに対するバッチャリヤ型情報不等式. 京都大学 数理解析研究所講究録 1860, 1 - 8, 査読無, <http://hdl.handle.net/2433/195298>

¹¹大谷内奈穂・赤平昌文 (2013). Asymptotic comparison of estimators for a family of truncated distributions. 京都大学 数理解析研究所講究録 1860, 129 - 139, 査読無, <http://hdl.handle.net/2433/195289>

¹²Akahira, M., Ohyauchi, N. and Kawai, K. (2013). A higher order approximation to a percentage point of the distribution of a noncentral t-statistic without the normality assumption. Commun. Statist. - Simula., 42, 2086 - 2105, 査読有, DOI 10.1080/03610918.2012.695841

¹³Yata, K. and Aoshima, M. (2012). Asymptotic properties of a distance-based classifier for high-dimensional data, 京都大学 数理解析研究所講究録 1804, 1 - 10, 査読無, <http://hdl.handle.net/2433/194384>

¹⁴小池健一・神谷内 裕(2012). ベイズ推測における事前分布の持つ情報の評価. 京都大学 数理解析研究所講究録 1804, 1 - 10, 査読無, <http://hdl.handle.net/2433/194389>

¹⁵赤平昌文・大谷内奈穂 (2012). The asymptotic expansion of the maximum likelihood estimator for a truncated exponential family of distributions. 京都大学 数理解析研究所講究録 1804, 188 - 192, 査読無, <http://hdl.handle.net/2433/194375>

¹⁶Akahira, M., Kim, H. G. and Ohyauchi, N. (2012). Loss of information of a statistic for a family of non-regular distributions, II: more general case. Ann. Inst. Statist. Math., 64, 1121 - 1138, 査読有, DOI 10.1007/s10463-011-0347-4

[学会発表](計 13 件)

¹田崎雅裕・小池健一: Skew q-gaussian distribution. RIMS 共同研究による研究会、2016年3月7日、京都大学数理解析研究所(京都市左京区)

²橋本真太郎・小池健一: Reference priors via ϕ -divergence in non-regular multi-parameter case. 日本数学会秋期総合分科会、2015年9月16日、京都産業大学(京都市北区)

³橋本真太郎・小池健一: Reference priors with maximum divergence for multiparameter non-regular models. 日本数学会年会、2015年3月23日、明治大学(東京都千代田区)

⁴大谷内奈穂・赤平昌文: Asymptotic loss of the MLE of a truncation parameter for a two-sided truncated exponential family of distributions. 日本数学会年会、2015年3月23日、明治大学(東京都千代田区)

⁵赤平昌文・大谷内奈穂: Asymptotic loss of the MLE of a truncation parameter for a one-sided truncated exponential family of distributions. 日本数学会年会、2015年3

月23日、明治大学(東京都千代田区)

⁶矢田和善・青嶋 誠: 高次元データの2次判別分析について. 日本数学会年会、2014年3月17日、学習院大学(東京都豊島区)

⁷赤平昌文: Asymptotic comparison of the MLE and MLE of a natural parameter up to the second order for a truncated exponential family of distributions. 日本数学会年会、2014年3月17日、学習院大学(東京都豊島区)

⁸Ohyauchi, N.: Asymptotic concentration probabilities of the Pitman estimator and weighted estimators in the non-regular case. The 59th World Statistics Congress of the International Statistical Institute, Aug. 29, 2013, Hong Kong Convention and Exhibition Centre, China

⁹Akahira, M.: Interval estimation procedures and information inequalities. The 59th World Statistics Congress of the International Statistical Institute(招待講演), Aug. 29, 2013, Hong Kong Convention and Exhibition Centre, China

¹⁰Aoshima, M and Yata, K.: Effective PCA for high-dimensional data and its applications. The 59th World Statistics Congress of the International Statistical Institute(招待講演), Aug. 27, 2013, Hong Kong Convention and Exhibition Centre, China

¹¹橋本真太郎・小池健一: Bayes リスクに対する情報不等式について. 日本数学会年会、2013年3月22日、京都大学(京都市左京区)

¹²矢田和善・青嶋 誠: Power spiked モデルをもつ高次元データの固有値推定について. 日本数学会年会、2013年3月21日、京都大学(京都市左京区)

¹³Akahira, M., Kim, H. G. and Ohyauchi, N.: Loss of information associated with the statistic in a class of non-regular cases. The 2nd Institute of Mathematical Statistics Asia Pacific Rim Meeting, Tsukuba International Congress Center, July 3, 2012, Tsukuba, Ibaraki

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~akahira/masafumi/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

赤平 昌文 (AKAHIRA Masafumi)

筑波大学 名誉教授

研究者番号: 70017424

(2) 研究分担者

青嶋 誠 (AOSHIMA Makoto)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号: 90246679

小池 健一 (KOIKE Ken-Ichi)
筑波大学・数理物質系・准教授
研究者番号：90260471

大谷内 奈穂 (OHYAUCHI Nao)
筑波大学・数理物質系・助教
研究者番号：40375374

鳥越 規央 (TORIGOE Norio)
東海大学・理学部・准教授
研究者番号：40297180
(平成25年10月まで)