# 情報数学III講義（第8回）

平成29年11月27日

## § 微分形式

スカラー関数である0次の微分形式 $\varphi(x,y,z)$ を微分すると

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

という1次の微分形式となる．

また1次の微分形式 $\omega=f_1dx+f_2dy+f_3dz$ $(f_i:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R})$ を微分すると

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}dx+\frac{\partial f_1}{\partial y}dy+\frac{\partial f_1}{\partial z}dz\right)\wedge dx\\
&+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}dx+\frac{\partial f_2}{\partial y}dy+\frac{\partial f_2}{\partial z}dz\right)\wedge dy\\
&+\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}dx+\frac{\partial f_3}{\partial y}dy+\frac{\partial f_3}{\partial z}dz\right)\wedge dz\\
=&\frac{\partial f_1}{\partial x}\underline{dx\wedge dx}+\frac{\partial f_1}{\partial y}dy\wedge dx+\frac{\partial f_1}{\partial z}dz\wedge dx\\
&+\frac{\partial f_2}{\partial x}dx\wedge dy+\frac{\partial f_2}{\partial y}\underline{dy\wedge dy}+\frac{\partial f_2}{\partial z}dz\wedge dy\\
&+\frac{\partial f_3}{\partial x}dx\wedge dz+\frac{\partial f_3}{\partial y}dz\wedge dx+\frac{\partial f_3}{\partial z}\underline{dz\wedge dz}
\end{aligned}$$

ここで下線を引いた部分については，微分形式の性質で $\varphi\wedge\varphi\ =\ 0$ であることから全て0になる．また，$\varphi\wedge\psi\ =\ -\psi\wedge\varphi$ であることを利用して次のように変形できる．

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dx\wedge dy+\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)dz\wedge dx$$

## § **ベクトル解析と微分形式**

ここまで，ベクトル解析と微分形式を学習してきた．

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ベクトル解析** | スカラー場<br>$\varphi$ | $\xrightarrow{grad}$ | ベクトル場<br>$f_1e_1+f_2e_2+f_3e_3$ | $\xrightarrow{rot}$ | ベクトル場 | $\xrightarrow{div}$ | スカラー場 |
| **微分形式** | 0次の微分形式 | | 1次の微分形式<br>$f_1dx+f_2dy+f_3dz$ | | 2次の微分形式<br>$f_1dy\wedge dz$<br>$+f_2dz\wedge dx$<br>$+f_3dx\wedge dy$ | | 3次の微分形式<br>$\varphi dx\wedge dy\wedge dz$ |

ここで，0 次の微分形式を微分することで 1 次の微分形式を導き出すことができる．これは，1 次の微分形式をベクトル場に戻して考えることで，スカラー場から grad の計算を行ったことに等しい．(→**レポート課題 I** へ)

またこれまでに，$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi)$ や $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{f})$ は 0 になることを学んでいる．これらの式を微分形式の計算から見るとどうなるかを確認したい．0 次の微分形式 $\varphi$ に 1 階微分を行うと $d\varphi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}dz$ であるが，これをもう一度微分する．

$$
\begin{aligned}
d(d\varphi)\ &= d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx\wedge dx+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy\wedge dx+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x}dz\wedge dx\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx\wedge dy+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy\wedge dy+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial y}dz\wedge dy\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}dx\wedge dz+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}dy\wedge dz+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\wedge dz
\end{aligned}
$$

ここで，$\varphi\wedge\varphi\ =\ 0$ であること，$\varphi\wedge\psi\ =\ -\psi\wedge\varphi$ であることを用いると

$$
\begin{aligned}
(\text{上式})\ &= 0\ +\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy\wedge dx\ +\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x}dz\wedge dx\\
&\quad-\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy\wedge dx\ +\ 0\ +\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial y}dz\wedge dy\\
&\quad-\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\wedge dx\ -\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}dy\wedge dz\ +\ 0\\
&= 0
\end{aligned}
$$

となる．これは $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi)=0$ を微分形式の計算から見た結果である．(→$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{f})$=0 については**レポート課題 IV** へ)

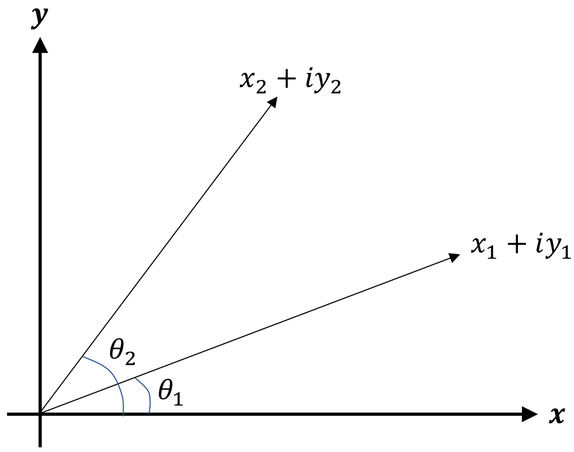
# 5　複素関数論

### § 高校での積分

例えば，スカラー関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を微分すると，1 次の微分形式 $f'dx$ が求められる．また，$dx: x\mapsto x$ における定積分 $\int_a^b f dx$ とは，1 次の微分形式を線積分したに等しくなる．

### § 極座標，複素数の積の復習

図のように，偏角 $\theta_1, \theta_2$ で，動径の大きさ $r_1$，$r_2$ の 2 複素数 $x_1+iy_1$，$x_2+iy_2$ を考える．




ここで極形式で $x_j = r_j \cos\theta_j$，$y_j = r_j \sin\theta_j$ と表されるので，複素数の積は加法定理を用いることにより

$$
\begin{aligned}
&(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)\\
&=\{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\}\{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\}\\
&=r_1r_2\{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2\}\\
&=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}
\end{aligned}
$$

と表される．

## 5.1　コーシーリーマンの方程式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ を解くための公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ を使う際に，$b^2-4ac<0$ の場合に対処するため 虚数単位 $i$ ($i^2=-1$ となる数) を用いる．複素数 $z$ とはこの虚数単位 $i$ と 2 つの実数 $x, y$ を用いて $z=x+iy$ と表される数である．

これまでの講義で，1変数の微分では比例定数 $f'$ が，多変数の微分では線形関数が出てくることを学んだ．例えば $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ の微分は，$f':\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$，$dx:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto x$，$dy:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto y$ と定義していた．同様に，複素数から複素数の関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ で複素数の微分を定義したい．

まず，$f_i:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ という関数を用いて $f=f_1+if_2$ と表す．これを微分すると，以下のようになる．

$$\begin{aligned} df &= df_1+idf_2 \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}dx+\frac{\partial f_1}{\partial y}dy\right)+i\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}dx+\frac{\partial f_2}{\partial y}dy\right) \end{aligned} \tag{1}$$

ここで複素数 $z$ について $dz=dx+idy$ を定義する．微分が $df=\alpha\, dz$ と表せるような $\alpha$ の存在条件を調べてみる．すなわち $\exists\alpha\in\mathbb{C},\ \alpha=\alpha_1+i\alpha_2,\ \alpha_i:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ を考えると，

$$\begin{aligned} \alpha\, dz &= (\alpha_1+i\alpha_2)(dx+idy) \\ &= (\alpha_1 dx-\alpha_2 dy)+i(\alpha_2 dx+\alpha_1 dy) \end{aligned} \tag{2}$$

以上2式 (1) と (2) の係数を比較すると，以下の条件が得られる．

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=\alpha_1,\qquad -\frac{\partial f_1}{\partial y}=\alpha_2,\qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}=\alpha_1,\qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}=\alpha_2$$

従って，$df=\alpha\, dz$ を満たす必要十分条件は

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=\frac{\partial f_2}{\partial y},\quad \frac{\partial f_2}{\partial x}=-\frac{\partial f_1}{\partial y}$$

となる．この条件をコーシーリーマン（Cauchy-Riemann）の方程式という．またコーシーリーマンの方程式が成り立つとき，その関数を正則関数や解析関数と呼ぶ．また，この場合の関数 $\alpha$ を微分係数と言う．複素関数論で対象とするのはこの方程式が成り立つ関数のみである．

例として以下の関数が正則であることを確かめる．

- $f(z)=c$ （定値関数）
  $c=c_1+ic_2$ とする．$f_1(x,\ y)=c_1,\ f_2(x,\ y)=c_2$ であるので $f_i$ はどちらの変数 $x,y$ で偏微分しても 0 になる．

  $$\frac{\partial f_1}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}=0$$

  したがってコーシーリーマンの方程式が成り立つので，定数関数は正則である．このときの微分係数は $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2=0+0$ より 0 である．

- $f(z) = z$
  $z = x + iy$ とする．$f_1(x,\ y) = x,\ f_2(x,\ y) = y$ であるので，以下の計算が成り立つ．

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$$

  したがってコーシーリーマンの方程式が成り立つので，定数関数は正則である．このときの微分係数は $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 = 1 + 0$ より $1$ である．

- $f(z) = z^2$
  $z = x + iy$ とする．$f(x,\ y) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$ より $f_1(x,\ y) = x^2 - y^2,\ f_2(x,\ y) = 2xy$ であるので，以下の計算が成り立つ．

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -2y, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2y$$

  したがってコーシーリーマンの方程式が成り立つので，定数関数は正則である．このときの微分係数は $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 = 2x + i \cdot 2y = 2(x + iy)$ より $2z$ である．

(→**レポート課題 III, IV へ**)

## § 今週のレポート課題

**I.**

2 次の微分形式 $f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$ を微分することにより，2 次の微分形式の微分がベクトル解析における div の計算に対応することを示せ.

**II.**

複素関数 $f(z) = z^n$ ($n$ は自然数) が正則であるかを調べ，正則関数ならば微分係数も合わせて求めよ.

**III.**

複素関数 $f$, $g$ が正則であるとき，次の問に答えよ.

**(1)** $f + g$ が正則であること，$(f+g)' = f' + g'$ であることを示せ.

**(2)** $\alpha f \quad (\alpha \in \mathbb{C})$ が正則であること，$(\alpha f)' = \alpha f'$ であることを示せ.

**(3)** $fg$ が正則であること，$(fg)' = f'g + fg'$ であることを示せ.

**(4)** $\dfrac{f}{g} \quad (g \neq 0)$ が正則であること，$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g'}$ であることを示せ.

**IV.**

1 次の微分形式 $\omega = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ の 2 階微分 $dd\omega$ が 0 になることを示せ.