情報数学III講義（第7回）

平成29年11月22日

§ 復習：微分形式

前回までの講義で交代形式を学んできた．

1次の交代形式	$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	線形写像
2次の交代形式	$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	二重線形・交代
m次の交代形式	$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{m\text{個}} \to \mathbb{R}$	m重線形・交代

ここで，m次の微分形式とは$\mathbb{R}^n$の各点にm次の交代形式を対応させる写像をいい，例えば1次の交代形式の全体は線形空間であるが，n次元のベクトルについて基底$dx_i(1 \leq i \leq n)$は

$$dx_i : \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^n} \to \underbrace{x_i}_{\in \mathbb{R}}$$

と表される．

§ くさび形積

2つの1次の交代形式φ, ψに対して，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$を用いた

$$(\varphi \wedge \psi)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \ = \ \varphi(\boldsymbol{a})\psi(\boldsymbol{b}) - \varphi(\boldsymbol{b})\psi(\boldsymbol{a})$$

は2次の交代形式であることを示したい．例えば二重線形性（の一部）について

$$\begin{aligned}
&(\varphi\wedge\psi)(\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b})\\
&= \varphi(\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2})\psi(\boldsymbol{b})-\varphi(\boldsymbol{b})\psi(\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2})\\
&= (\varphi(\boldsymbol{a_1})+\varphi(\boldsymbol{a_2}))\psi(\boldsymbol{b})-\varphi(\boldsymbol{b})(\psi(\boldsymbol{a_1})+\psi(\boldsymbol{a_2}))\\
&= \underbrace{\varphi(\boldsymbol{a_1})\psi(\boldsymbol{b})-\varphi(\boldsymbol{b})\psi(\boldsymbol{a_1})}_{(\varphi\wedge\psi)(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b})}+\underbrace{\varphi(\boldsymbol{a_2})\psi(\boldsymbol{b})-\varphi(\boldsymbol{b})\psi(\boldsymbol{a_2})}_{(\varphi\wedge\psi)(\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b})}
\end{aligned}$$

である．(続きは**レポート課題 I** で)

また，dx_i, dx_j を用いると，

$$\begin{aligned}
(\underbrace{dx_i}_{\varphi}\wedge\underbrace{dx_j}_{\psi})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) &= \underbrace{dx_i(\boldsymbol{a})}_{a_i}\underbrace{dx_j(\boldsymbol{b})}_{b_j}-\underbrace{dx_i(\boldsymbol{b})}_{b_i}\underbrace{dx_j(\boldsymbol{a})}_{a_j}\\
&= a_ib_j-b_ia_j = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

のようになる．(→**レポート課題 II** へ)

さらに，φ と ψ が1次の交代形式である場合，

$$(\psi\wedge\varphi)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \psi(\boldsymbol{a})\varphi(\boldsymbol{b})-\psi(\boldsymbol{b})\varphi(\boldsymbol{a})$$

であることから $\underline{\varphi\wedge\psi=-\psi\wedge\varphi}$ であることが分かる．
ここで $\psi = \varphi$ である場合，$\varphi\wedge\varphi=-\varphi\wedge\varphi$ であり，$2\varphi\wedge\varphi = 0 \Rightarrow \varphi\wedge\varphi = 0$ である．(→**レポート課題 III** へ)

続いて，1次の交代形式 $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ ($\underbrace{\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n}_{m\text{ 個}} \to \mathbb{R}$) を考える．このとき，

$$\begin{aligned}
&(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m)(\boldsymbol{a_1},\ \ldots,\ \boldsymbol{a_m})\\
&= \sum_{\sigma}\mathrm{sgn}(\sigma)\varphi_1(\boldsymbol{a}_{\sigma(1)})\varphi_2(\boldsymbol{a}_{\sigma(2)})\cdots\varphi_m(\boldsymbol{a}_{\sigma(m)})
\end{aligned}$$

は m 重線形かつ交代性を持つので，m 次の交代形式を持つ（例えば，$m=2$ については本節の最初の式で示した通り）．

すなわち，m 次の交代形式の全体は線形空間を持ち，基底は

$$\{dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_m}\}_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_m\le n}$$

で表される（→**レポート課題 IV へ**）．
ここで，例えば $\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12}$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_{11} + \varphi_{12}) \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m = \varphi_{11} \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m + \varphi_{12} \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m \\
&(\alpha\varphi_1) \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m = \alpha\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_m \\
&\varphi_1 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_4 \wedge \cdots \wedge \varphi_m = -\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4 \wedge \cdots \wedge \varphi_m
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

§ くさび形積と微分形式

1 次の微分形式は $f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots f_n dx_n$ （$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$），2 次の微分形式は $f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{13} dx_1 \wedge dx_3 + f_{23} dx_2 \wedge dx_3 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij} dx_i \wedge dx_j$ （$f_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$）と表される．これを拡張すると m 次の微分形式は，

$$
\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n} f_{i_1, i_2, \ldots, i_m} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m}
$$

と表される．

ここで 0 次の微分形式 $\varphi : \mathbb{R}^n \to R$ を考える．微分 $D\varphi$ は 1 次の微分形式であり，点 $\boldsymbol{x}$ から伸びる微小長の曲線 $\boldsymbol{a}d$ について，

$$
\begin{aligned}
(D\varphi)(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})d &= \varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}d) - \varphi(\boldsymbol{x}) \\
&= \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n \right)}_{D\varphi(\boldsymbol{x})} (\boldsymbol{a})d
\end{aligned}
$$

は微小長の曲線に関する線積分である．

また 1 次の微分形式 ω について，$D\omega$ は 2 次の微分形式である．点 $\boldsymbol{x}$ から相違なる 2 方向に伸びる微小ベクトル $\boldsymbol{a}d_1, \boldsymbol{b}d_2$ について，

$$
\begin{aligned}
&D\omega(\boldsymbol{a}d_1, \boldsymbol{b}d_2) = (D\omega(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}))d_1 d_2 \\
&= \omega(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a}d_1) \underline{+\omega(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}d_1)(\boldsymbol{b}d_2)} - \omega(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}d_2)(\boldsymbol{a}d_1) \underline{-\omega(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}d_2)}
\end{aligned}
$$

を考える．$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots f_n dx_n$ と表されることから，上式の下線を引い

た２項を取り出して計算すると,

$$
\begin{aligned}
&\omega(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}d_1)(\boldsymbol{b}d_2)-\omega(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}d_2)\\
=&\left\{f_1(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}d_1)-f_1(\boldsymbol{x})\right\}dx_1(\boldsymbol{b}d_2)+\left\{f_2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}d_1)-f_2(\boldsymbol{x})\right\}dx_2(\boldsymbol{b}d_2)+\cdots\\
&+\left\{f_n(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}d_1)-f_n(\boldsymbol{x})\right\}dx_n(\boldsymbol{b}d_2)\\
=&\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})dx_1(\boldsymbol{a}d_1)+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})dx_2(\boldsymbol{a}d_1)+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})dx_n(\boldsymbol{a}d_1)\right)dx_1(\boldsymbol{b}d_2)\\
&+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})dx_1(\boldsymbol{a}d_1)+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})dx_2(\boldsymbol{a}d_1)+\cdots+\frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})dx_n(\boldsymbol{a}d_1)\right)dx_2(\boldsymbol{b}d_2)\\
&+\cdots\\
&+\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})dx_1(\boldsymbol{a}d_1)+\frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})dx_2(\boldsymbol{a}d_1)+\cdots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})dx_n(\boldsymbol{a}d_1)\right)dx_n(\boldsymbol{b}d_2)\\
=&\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})a_1d_1+\cdots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})a_nd_1\right)b_1d_2\\
&+\cdots\\
&+\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})a_1d_1+\cdots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})a_nd_1\right)b_nd_2
\end{aligned}
$$

と計算できる. (→続きは**レポート課題 V** で)

§ 今週のレポート課題

I.

くさび形積について，次の問に答えよ．

(1) $(\varphi\wedge\psi)(\alpha\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\alpha(\varphi\wedge\psi)(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})\ \ (\alpha\in\mathbb{R})$ を示すことで二重線形であることを示せ．

(2) $(\varphi\wedge\psi)(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=-(\varphi\wedge\psi)(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a})$ を示すことで交代性を持つことを示せ．

II.

$(dx_i\wedge dx_j)(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ の基底が $\{dx_i\wedge dx_j\}_{1\leq i<j\leq n}$ で表されることを示せ．

III.

$\varphi,\ \psi$ が 1 次の交代形式のとき，次の式を示せ．

(1) $(\varphi_1\wedge\varphi_2)\wedge\psi\ =\ \varphi_1\wedge\psi+\varphi_2\wedge\psi$

(2) $(\alpha\varphi)\wedge\psi\ =\ \alpha(\varphi\wedge\psi)\ \ (\alpha\in\mathbb{R})$

IV.

m 次の交代形式について，基底 $\{dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_m}\}_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_m\leq n}$ の次元を求めよ．

（ヒント：**レポート課題 II** における基底の次元は，$1\leq i<j\leq n$ を満たす $(i,\ j)$ の組み合わせを考えて ${}_n\mathrm{C}_2=\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n!}{2\cdot(n-2)!}$ で表される）

V.

$D\omega(\boldsymbol{a}d_1,\boldsymbol{b}d_2)$ について本文中で扱っていない $\omega(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a}d_1)-\omega(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}d_2)(\boldsymbol{a}d_1)$ を計算することにより，$D\omega(\boldsymbol{a}d_1,\boldsymbol{b}d_2)$ を ω を用いない式に変形せよ．