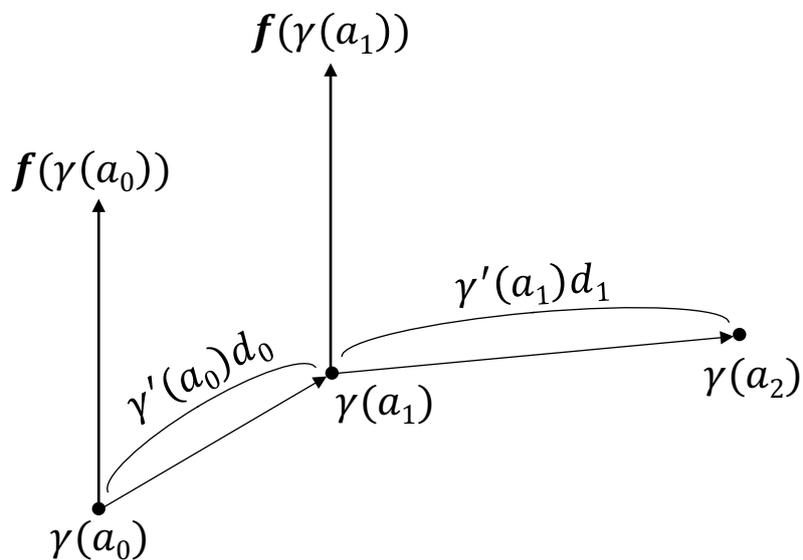


情報数学III講義（第4回）

平成29年10月25日

§ 前回の復習：線積分

ベクトル場として，図のような微小区間の力の場を考える．



このとき，なされる仕事は

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}(\gamma(a_0)) \cdot (\gamma'(a_0)d_0) + \mathbf{f}(\gamma(a_1)) \cdot (\gamma'(a_1)d_1) + \dots \\ & = \mathbf{f}(\gamma(a_0)) \cdot \gamma'(a_0) \cdot d_0 + \mathbf{f}(\gamma(a_1)) \cdot \gamma'(a_1) \cdot d_1 + \dots \end{aligned}$$

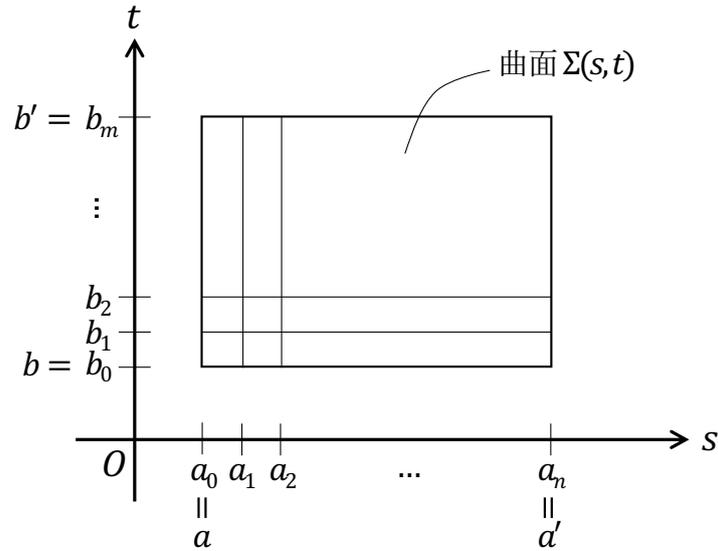
で計算され，これを

$$\begin{aligned} & \int_r \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \\ & = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{f}(\gamma(a_i)) \cdot \gamma'(a_i)d_i \\ & = \int_a^b \mathbf{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \end{aligned}$$

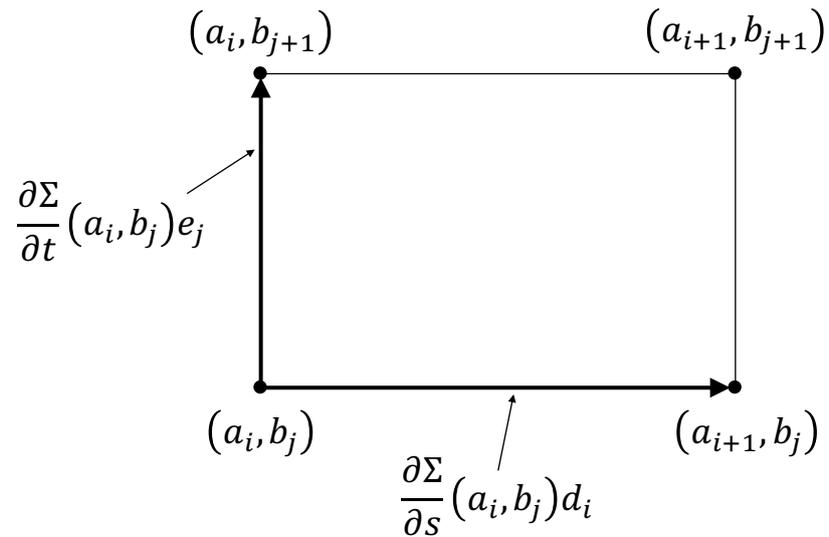
と表す.

§ 前回の復習：面積分

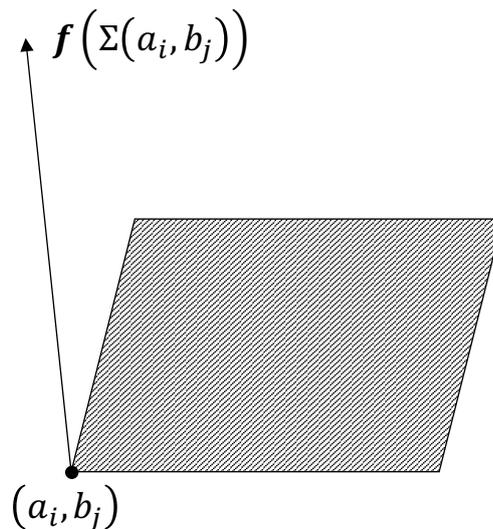
ベクトル場として、水の流れ場を考える。このとき、曲面 $\Sigma[a, a'] \times [b, b'] \rightarrow \mathbb{R}^3$ について、次のような図を考える。



このとき、 $(a_i, b_j), (a_{i+1}, b_j), (a_i, b_{j+1}), (a_{i+1}, b_{j+1})$ の4点で囲まれる微小な領域は平行四辺形とみなすことができる。その一部を取り出すと次のような図になる。



ここで、この平行四辺形は2本のベクトル $\frac{\partial \Sigma}{\partial s}(a_i, b_j)d_i$ と $\frac{\partial \Sigma}{\partial t}(a_i, b_j)e_j$ で張られる ($d_i = a_{i+1} - a_i$, $e_j = b_{j+1} - b_j$) .
 さらに次の図を考える.



ここで考える線積分とはすなわち、面を横切る水の量であり、これは微小領域の平行四辺形の面積（図の斜線部）に高さを掛けた、平行六面体の体積と考えることができる。よって面積分は

$$\mathbf{f}(\Sigma(a_i, b_j)) \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(a_i, b_j)d_i \times \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(a_i, b_j)e_j$$

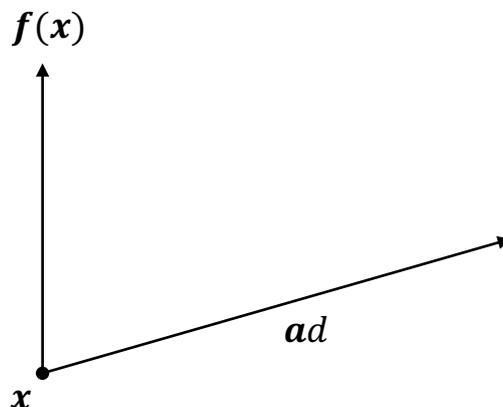
の微小領域分の総和となり（注： \cdot は内積， \times は外積（ベクトル積）を示す），これを

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{f}(\Sigma(a_i, b_j)) \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(a_i, b_j) \times \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(a_i, b_j)d_i e_j \\ &= \int_b^{b'} \int_a^{a'} \mathbf{f}(\Sigma(s, t)) \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s, t) ds dt \end{aligned}$$

と表す.

3.5 1 次 of 交代形式

まず力 of 場について考える.



点 x で力 f が働いていたとして, その作用のもとで, x からベクトル a に沿う無限小 of 移動を行うと, なされる仕事量は

$$f(x) \cdot ad$$

である. (ただし $d \in D = \{d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0\}$, $a \in \mathbb{R}^3$.)

ここで $\varphi : a \mapsto f(x) \cdot a$ を考える. これは \mathbb{R}^3 から \mathbb{R} への線形写像と考えられる. φ は線形性, 交代性 (引数を入れ替えると符号が変わる) をもつため **1 次 of 交代形式** と呼ばれる. 空間 of 各点に 1 次 of 交代形式を対応させる写像を **1 次 of 微分形式** と呼ぶ. 空間 of 各点にベクトル場を対応させる写像をベクトル場と呼ぶ. 1 次 of 交代形式 of 全体は線形空間 (3 次元) をなす.

ここで, dx, dy, dz を基底とした線形写像 ($\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$)

$$dx : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x, \quad dy : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto y, \quad dz : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto z$$

を考えると, 任意 of ベクトルを表す式

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

と 1 次 of 交代形式

$$\alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz$$

は対応している. 同様に, ベクトル場 $f_i : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ について

$$f_1(x, y, z) e_1 + f_2(x, y, z) e_2 + f_3(x, y, z) e_3$$

と1次の微分形式

$$f_1(x, y, z)dx + f_2(x, y, z)dy + f_3(x, y, z)dz$$

は対応している.

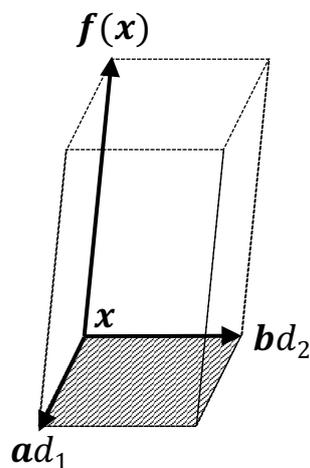
また, 線積分の式を1次の微分形式 ω を用いて表すと

$$\begin{aligned}\int_r \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt (a_i) d_i \\ \Rightarrow \int_r \omega &= \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt\end{aligned}$$

となる.

3.6 2次の交代形式

次に流れの場合 (例えば水の流れ) について考える. 点 \mathbf{x} での流れは, \mathbf{x} を起点として2つのベクトル $\mathbf{a}d_1, \mathbf{b}d_2$ で張られる小さな升を考えて, 単位時間に横切る水の量 (体積) を観測すればよい. (ただし $d_1, d_2 \in D, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.) このとき求める体



積は次のようになる (ただし θ は \mathbf{a}, \mathbf{b} のある平面と \mathbf{f} の角度):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{a}d_1 \times \mathbf{b}d_2) = (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) d_1 d_2$$

ここで先ほどと同様に $\varphi: (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ を考える. これは $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ から \mathbb{R} への線形写像と考えられる. 外積は二重線形性, 交代性をもつため, これを**2次の交代形式**という. 空間の各点に2次の交代形式を対応させたものを**2次の微分形式**と呼ぶ. 2次の交代形式の全体は線形空間 (3次元) をなす.

ここで、以下のくさび形積 ($\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} dy \wedge dz &: \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\ dz \wedge dx &: \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \\ dx \wedge dy &: \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

を考えると、任意のベクトルを表す式

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3$$

と 2 次の交代形式

$$\alpha_1 dy \wedge dz + \alpha_2 dz \wedge dx + \alpha_3 dx \wedge dy$$

は対応している。

同様に、ベクトル場 $f_i : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ について

$$f_1(x, y, z) \mathbf{e}_1 + f_2(x, y, z) \mathbf{e}_2 + f_3(x, y, z) \mathbf{e}_3$$

と 2 次の微分形式

$$f_1(x, y, z) dy \wedge dz + f_2(x, y, z) dz \wedge dx + f_3(x, y, z) dx \wedge dy$$

は対応している。

また面積分の式を 2 次の微分形式 ω を用いて表すと次のようになる。

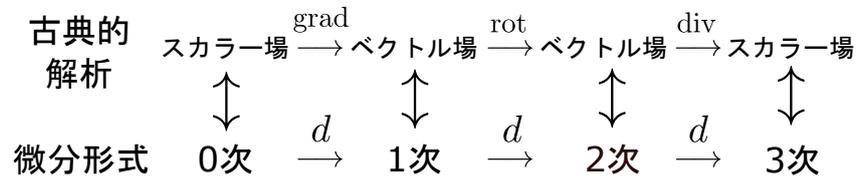
$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} &= \int_b^{b'} \int_a^{a'} \mathbf{f}(\Sigma(s, t)) \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s, t) \right) ds dt \\ \Rightarrow \iint_{\Sigma} \omega &= \int_b^{b'} \int_a^{a'} \omega(\Sigma(s, t)) \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s, t) \right) ds dt \end{aligned}$$

§ 3 次の交代形式

1 次, 2 次と同様に, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \mapsto \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ において, 任意のベクトルを入れ替えても線型となる場合, これを三重線形といい, また任意のベクトルを入れ替えて符号が変わる場合, 交代性を持つという。

3.7 古典的な解析と微分形式の対応関係

スカラー場やベクトル場と微分演算の対応関係は以下のように表せる。



ここで grad は、成分が φ の偏微分で与えられる以下のベクトル場、つまり $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ において、

$$\varphi'(\mathbf{x}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\mathbf{x})dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\mathbf{x})dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\mathbf{x})dz$$

で表される。

§ 今週のレポート課題

(先週の課題)

V.

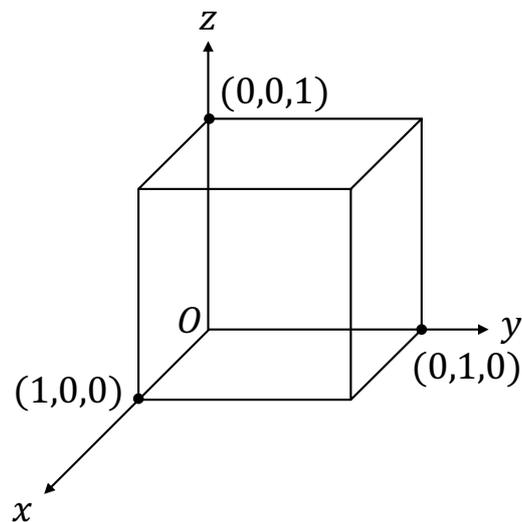
ベクトル場 $\mathbf{r} : (x, y, z) \mapsto (x, y, z)$ において, $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ を線積分せよ

VI.

V.と同じベクトル場 \mathbf{r} において, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ を面積分せよ

VII.

V.と同じベクトル場 \mathbf{r} において, 下図の六面体について面積分せよ



(今週分)

I.

3 次の行列式 $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ は三重線形であるが, 任意の 3 次の交代形式は, $\alpha \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ (α は任意のスカラー) で表されることを示せ.