情報数学III講義（第10回）

平成29年12月13日

§ 線積分の復習

高校で学習した積分は次のような形であった（$f = F'$ のとき）．

$$\int_a^b \underbrace{f(x)dx}_{1\text{次の微分形式}} = F(a) - F(b)$$

複素平面に置ける線積分は（$\gamma : [a,\ b] \to \mathbb{C}$）

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

特に γ が閉曲線，つまり $\gamma(b) = \gamma(a)$ のとき，線積分は 0 になる．

また，$F(z) = z^{n+1}$（n は整数）のとき，$F'(z) = (n+1)z^n$ であり，$f(z) = z^n$ は $n \neq -1$ の場合，原始関数と言える．従って，

$$\int_\gamma z^n dz = 0$$

と言える．また，

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

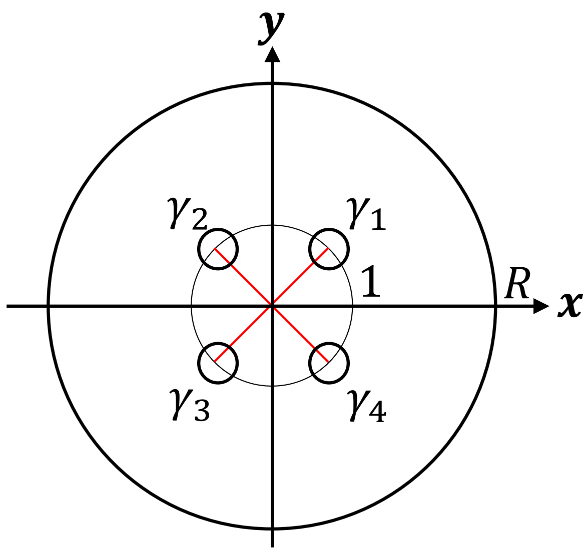
であった．

7　複素関数の利用

　これまでに学習してきた内容を元に，様々な計算をしてみよう．まずは中心原点，半径が $R\ (>1)$ で示される閉曲線 γ（円）を考える．このとき $f(z)=\dfrac{z^2}{1+z^4}$ とし，

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma \frac{z^2dz}{1+z^4}$$

を計算してみよう．



　分母が 0 にならなければ，ストークスの定理よりこの線積分は 0 になることが容易に導かれる．ただし分母が 0 になるのは目に見えているので，まずは $1+z^4=0$ となる z を求める．$\theta\in[0,\ 2\pi]$ とするとき，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とすると，ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned}&1+(\cos\theta+i\sin\theta)^4=0\\&\cos4\theta+i\sin4\theta=-1\end{aligned}$$

$\cos4\theta=-1$ かつ $\sin4\theta=0$ を満たすとき，$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$ なので，$z=\dfrac{\pm1\pm i}{\sqrt{2}}$（復号任意）となる．いわゆる，この 4 点が特異点にあたる．

　図のように，特異点のまわりに小さな円 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ を考える．$\gamma\cup\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$ の内部では $f(z)$ は正則なので次式が成り立つ．

$$\int_{\gamma\cup\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4} f(z)dz=0$$

この式はすなわち次を示す．

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma} f(z)dz-\int_{\gamma_1} f(z)dz-\int_{\gamma_2} f(z)dz-\int_{\gamma_3} f(z)dz-\int_{\gamma_4} f(z)dz=0\\
\Leftrightarrow &\int_{\gamma} f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{\gamma_2} f(z)dz+\int_{\gamma_3} f(z)dz+\int_{\gamma_4} f(z)dz\\
&\int_{\gamma} f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{\gamma_4} f(z)dz
\end{aligned}$$

特異点を第一象限から順に $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$ とする．上式の右辺の線積分を求めるたい．ここで，分母と分子は次のように変形ができる．

$$\begin{aligned}
&\text{（分母）}\ 1+z^4 &=& \ (z-\omega_1)(z-\omega_2)(z-\omega_3)(z-\omega_4)\\
&\text{（分子）}\ z^2 &=& \ a_0+a_1(z-\omega_1)+a_2(z-\omega_1)^2
\end{aligned}$$

これらを用いて式を変形する．

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_1}\frac{z^2dz}{1+z^4}\\
=&\int_{\gamma_1}\frac{a_0+a_1(z-\omega_1)+a_2(z-\omega_1)^2}{(z-\omega_1)(z-\omega_2)(z-\omega_3)(z-\omega_4)}dz\\
=&\int_{\gamma_1}\frac{a_0dz}{(z-\omega_1)(z-\omega_2)(z-\omega_3)(z-\omega_4)}\\
&+\underline{\int_{\gamma_1}\frac{a_1(z-\omega_1)dz}{(z-\omega_1)(z-\omega_2)(z-\omega_3)(z-\omega_4)}}\\
&+\underline{\int_{\gamma_1}\frac{a_2(z-\omega_1)^2dz}{(z-\omega_1)(z-\omega_2)(z-\omega_3)(z-\omega_4)}}
\end{aligned}$$

ここで，下線を引いた 2 つの部分は約分によって分母から $(z-\omega_1)$ が消えるため，値は 0 になる．さらに，$g(z)=\dfrac{a_0}{(z-\omega_2)(z-\omega_3)(z-\omega_4)}$ と定めると，コーシーの積分公式を用いることで上式は次のように変形できる．

$$\int_{\gamma_1}\frac{g(z)}{z-\omega_1}dz=2\pi i g(\omega_1)$$

ここで $g(\omega_1)$ とは

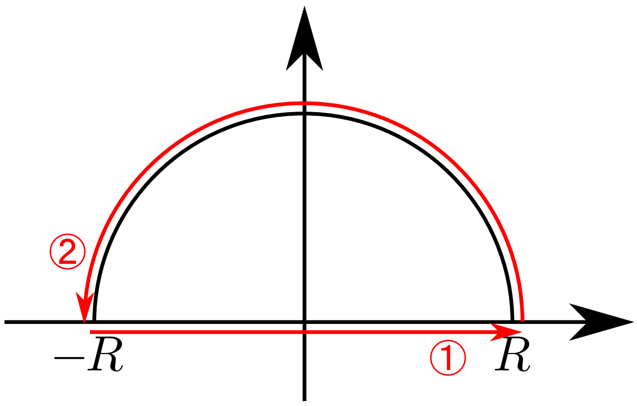
$$\begin{aligned}
g(\omega_1)&=\frac{a_0}{(\omega_1-\omega_2)(\omega_1-\omega_3)(\omega_1-\omega_4)}\\
&=\frac{a_0+a_1(\omega_1-\omega_1)+a_2(\omega_1-\omega_1)^2}{(\omega_1-\omega_2)(\omega_1-\omega_3)(\omega_1-\omega_4)}
\end{aligned}$$

（$1+z^4$を $(z-\omega_1)$ で割る）

$$=\frac{z^2}{(z-\omega_2)(z-\omega_3)(z-\omega_4)}$$

最後に出てきた $\dfrac{z^2}{(z-\omega_2)(z-\omega_3)(z-\omega_4)}$ を関数 $h(x)$ と置いた場合，$h(\omega_1)$ の値に 2π を乗ずることで $\displaystyle\int_{\gamma_1}\frac{z^2dz}{1+z^4}$ が求められる．これと同様の手段で $\displaystyle\int_{\gamma_2}\frac{z^2dz}{1+z^4}$, $\displaystyle\int_{\gamma_3}\frac{z^2dz}{1+z^4}$, $\displaystyle\int_{\gamma_4}\frac{z^2dz}{1+z^4}$ を求めることで，最終的に $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)dz$ を求めることができる（**→レポート課題 I へ**）．

また別の問題を考えよう．中心が原点，半径が十分に大きい R の半円を考える．この半円における線積分を考える．図のような半円の経路 $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$ を設定する．（①が γ_1 に，②が γ_2 にあたる）．



ここで実軸乗の線積分（γ_1）は $\displaystyle\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{1+x^4}dx$ となり，また半円の円周部の線積分（γ_2）は $\displaystyle\int_{\gamma_2}\frac{z^2}{1+z^4}dz$ と表される．なお，この和は計算すると

$$\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{1+x^4}dx+\int_{\gamma_2}\frac{z^2}{1+z^4}dz=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

となる．

次に，複素数で定義された関数 $f(z)=\dfrac{z^2}{1+z^4}$ を考え，$R\to\infty$ を考えよう．ここで γ 上で $|f(z)|\leq M$ のとき，L を γ の長さとすると以下が成り立つ．

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right|\leq ML$$

この不等式を考慮すると，$\dfrac{z^2}{1+z^4}$ については $M=\dfrac{R^2}{R^4}$ となり半円の円周 πR より，$\dfrac{\pi}{R}$ が得られる．このとき，$R\to\infty$ とすると，$\dfrac{1}{R}\to 0$ となるため，積分路

②（γ_2）が 0 に近づくことがわかる．

ちなみに以下のような考え方でもできる．
$\gamma_2 : \theta \in [0, \pi] \to R(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_2} \frac{z^2 dz}{1+z^4}\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{R^2(\cos\theta + i\sin\theta)^2}{1+R^4(\cos\theta + i\sin\theta)^4}\frac{dz}{d\theta}d\theta\right| \\
&= \left|\int_0^\pi \frac{R^3(\cos\theta + i\sin\theta)^2(-\sin\theta + i\cos\theta)}{1+R^4(\cos\theta + i\sin\theta)^4}d\theta\right| \\
&\leq \frac{R^3}{R^4-1} \\
&= 0 \qquad (R \to \infty)
\end{aligned}
$$

以上より，

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}dx + \int_{\gamma_2} \frac{z^2}{1+z^4}dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

は $R \to \infty$ のとき，左辺の第 2 項が 0 になり，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

となる（→**レポート課題 II へ**）．

次の問題は

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

としよう．$f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ を考えるとき，関数 $f(z)$ は偶関数であるため，題意は

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

に等しい．ということは先ほどの問題のように半円を考えることで，直線部と円周部 γ_2^R の線積分について

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{\gamma_2^R} \frac{dz}{1+z^2}$$

となる．先ほどと同様に $R \to \infty$ のとき，円周部の線積分（第 2 項）は 0 になり，このとき，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

と計算される（→レポート課題 **III** へ）．

次に

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z^2+a^2)^2} \qquad (a > 0)$$

を考えよう．まず分母が 0 になるとき，$z = \pm ai$ である．したがって，次のように変形できる．

$$f(z) \ = \ \frac{1}{(z^2+a^2)^2} \ = \ \frac{1}{(z-ai)^2(z+ai)^2}$$

ここで，$\dfrac{1}{(z+ai)^2}$ については以下のように冪級数に展開ができる．

$$g(z) = \frac{1}{(z+ai)^2} = b_0 + b_1(z-ai) + b_2(z-ai)^2 + \cdots$$

となる．これを用いると $f(z)$ は以下のように書き換えられる．

$$f(z) \ = \ \frac{b_0}{(z-ai)^2} + \frac{b_1(z-a_i)}{(z-ai)^2} + \frac{b_2(z-a_i)^2}{(z-ai)^2} + \cdots$$

これを計算すると，

$$\begin{aligned} &\int_{\gamma_1} f(z)dz \\ &= \int_{\gamma_1} \frac{b_0}{(z-a_i)^2}dz + \underline{\int_{\gamma_1} \frac{b_1}{z-a_i}} + \int_{\gamma_1} b_2 dz + \int_{\gamma_1} b_3(z-a_i)dz + \cdots \end{aligned}$$

ここで，下線が引かれていない全ての項には原始関数が含まれているため，全て値が 0 になる．残った下線部の項については $2\pi i b_1$ という値が求められる．なお，関数 $g(z)$ を微分することで，残る項を調整することができる．例えば b_1 を求めたければ $g(z)$ を 1 階微分すればよい．

$$g'(z) \ = \ b_1 + 2b_2(z-ai)$$

- レポート課題 **IV, V** は，被積分関数が重解を持つかどうかで違いが生じる．

§ 今週のレポート課題

I.

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \frac{z^2 dz}{1+z^4}$$ を計算せよ．

II.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dz}{1+x^4}$$ を計算せよ．

III.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$ であることを示せ．

IV.

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+a^2)^2} \quad (a>0)$$ を計算せよ．

V.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3} \quad (a>0)$$ であることを示せ．

今回のレポート提出について

- 期日：2017 年 12 月 22 日（金）
- 提出場所：理学系事務室（自然 B 棟 2 階）のレポート BOX へ