

筑波大学審査学位論文(博士)

学校数学における数学的モデル化能力の育成に関する研究

—初等教育段階に焦点を当てて—

人間総合科学研究科 学校教育学専攻

平林 真伊

1. 研究の意図と目的

我々は、日常生活の中で様々な問題に直面する。その問題が複雑であればあるほど、解決の糸口を見つけ出すことは困難になる。また、問題となっている対象の本質を十分に理解することができず、問題があることは分かっているが、何が問題となっているのかが分からないことがしばしばある。このような状況に対して、単純な場合から問題を考えてみたり、別の問題に置き換えてみたり、理想的な状態を想像して考えてみたりすることによって、その状況を打破しようと試みることもある。これらの方法を用いて問題に働きかけることによって、問題についての理解が深まっていき、その結果として問題の解決がなされる。

このように、現実世界における問題を単純化したり、理想化したり、仮定を設定したりすることによって、数学の問題に置き換えて解決を図る活動が数学的モデル化である。数学的モデル化を遂行することで、現実世界と数学を結びつけ、現実世界における問題についての理解を深め、解決を試みるのである。

現行の中学校学習指導要領では、指導内容の一つとして数学的モデル化が明確に位置づいており、学校数学において数学的モデル化が重視されている。数学的モデル化の学習指導に関する先行研究では、主に中等教育段階での学習を想定し、数学的モデル化を遂行する力（以下、数学的モデル化能力とする）を育成するために教材を開発したり、授業の構成原理を明らかにしたりするというように、理論的・実践的視点から考察がなされ、研究成果が蓄積されてきた。

数学的モデル化の学習指導を構想する際には、数学的内容と数学的過程の対立が問題になる。内容を重視すれば過程が軽視され、過程を重視すれば内容が軽視されるというように、内容と過程の対立図式は研究上の葛藤の対象となっている。この対立は、小学校において特に顕著である。例えば、「9個のりんごを3人で分けると、1人分は何個か」という問題を解決する際には、数学的モデル化ではなく、除法の意味理解や計算の習熟が主たる指導内容となる。この文章題解決の指導に代表されるように、現実的な場面を扱いながらも、数学的モデル化を行わず、数学的内容の指導が先行している。

文部科学省による次期学習指導要領に向けた審議では、小学校において育成すべき数学的に考える資質・能力の一つとして、数学的モデル化能力が挙げられた。また、数学的モデル化過程の図式が算数の学習過程のイメージとして提示され、現実事象を数学の舞台に載せ、数学的結論を現実世界に戻すといった数学的モデル化を、今後の学習指導要領に明示的に位置づけようとしている。しかし、数学的モデル化を小学校に明示的に位置づけたとしても、内容と過程の対立の問題が解決されなければ、数学的内容の指導が先行され、数学的に考える資質・能力を育成することは困難である。数学的モデル化の立場から、小学校算数科における学習指導を論じる必要がある。

小学校において数学的内容を指導するために扱われる従来の文章題に対して、川口は、算数科における内容と問題解決の技能とは互いに対立する概念ではなく、並列するものとしてみるべきであると述べている。そして、学習指導に有意義な「場」を組み込むことで、幅

の広い自由な思考活動が要求される学習，及び問題解決的な学習形態を生かした系統学習を構成し得ることを示唆している（川口，1957）。児童は，中等教育段階で学習されるような高度な数学を利用して問題場면을数学的に解釈する活動を行わないまでも，小学生なりの手段を用いて問題場면을解釈し得るという意味で，数学的モデル化における問題場面の解釈に関して有能であることが想定される。そうであるならば，かつて川口によって提案されたように，小学校においても数学的内容の学習指導を踏まえた上で，さらに数学的なプロセス面を強調した学習指導を行うことは可能である。初等教育段階における学習指導が充実するとともに，中等教育段階での学習がより充実したものになることが期待される。

文章題を数学的モデル化研究の対象として扱うために，文章題の解決過程を新たに捉えなおす必要がある。その際，新たな視点から数学的モデル化を捉えなおす Lesh らによる着想が示唆的である。Lesh らは，問題場면을数学的に解釈することを目的とした数学的モデル化を視点に，問題の条件から目標を導くことが目的であった従来の問題解決に対し，問題の条件と目標を理解する反復的なサイクルとして問題解決を捉えなおした（Lesh & Zawojewski, 2007）。本研究では Lesh らによるこの着想を援用し，数学的モデル化を「問題場면을数学的に解釈すること」とし，数学的モデル化の視点から文章題解決を相対的に捉えなおし，初等教育段階における数学的モデル化能力を育成する学習指導の構想を試みる。

以上の背景から，本研究では，数学的モデル化能力を育成する学習指導を構想するために，初等教育段階における文章題の解決過程に着目し，数学的モデル化における問題場面の解釈を促進する方法を明らかにすることを目的とする。

2. 研究課題と研究方法

上記の目的を達成するために，本研究では二つの研究課題を設定する。第一は，数学的モデル化における問題場面の解釈を促進する方法を明らかにすることである。第二は，第一の研究課題で明らかにされた方法に基づいて教授実験を実施し，数学的モデル化における問題場面の解釈を促進する方法の有効性を明らかにすることである。

第一の研究課題は，数学的モデル化に関する文献の解釈，及び小学校において扱われる文章題の分析による理論的考察によって解決を試みる。そして第二の研究課題は，教授実験の実施と分析による実践的考察によって解決を試みる。

3. 論文の概要

第1章では，数学的モデル化に関する研究の展開と成果を整理し，先行研究の課題を指摘した。はじめに，問題場면을数学的に解釈することを目的とした数学的モデル化を提示した Lesh and Zawojewski (2007) に依拠し，数学的モデル化過程の概念規定を行った。次に，数学的モデル化に関する先行研究を，初等教育段階と中等教育段階を視点として整理し，数学的モデル化に関する先行研究の課題を指摘した。そして，現行の学習指導要領，全国学力・学習状況調査における調査問題，教科書における問題，及び子どもたちの実態から，初等教育段階における数学的モ

デル化の学習指導に焦点を当てる必要性を確認した。

第2章では、児童は数学的モデル化における問題場面の解釈に関して有能であるという立場のもと、数学的モデル化過程の「定式化」と「解釈・評価」に焦点を当て、児童による数学的モデル化能力の概念規定を行った。はじめに、数学的モデル化過程の各相に含まれる要素を詳細に挙げている三輪(1983)を参照し、「定式化」と「解釈・評価」に関する数学的モデル化能力の概念規定を行った。そして、児童による数学的モデル化能力に着目する理由を説明し、目標としての「定式化」、「解釈・評価」に対応する児童による活動を、それぞれ「みなすこと」、「あてはめること」と呼び、それらの概念規定を行った。「みなすこと」とは、適切であろうと不適切であろうと(暗黙的に)仮定を設定することで、ある問題場면을解釈した結果としてのモデルを導出する行為である。「あてはめること」とは、自身で設定した根拠に基づき、数学的結論をもとの現実場面と関連づけることで、問題場면을解釈した結果として現実世界における結論を求める行為である。

第3章では、児童による数学的モデル化における問題場面の解釈を促進する方法を理論的に明らかにした。はじめに、児童による問題場面の解釈が進展する過程を記述するために、「みなすこと」と「あてはめること」の促進を捉える枠組みを設定した。次に、これまでの考察を踏まえ、児童による問題場面の解釈を促進する方法を明らかにした。そして、児童による問題場面の解釈を促進する際に、文章題が問題場면을数学的に解釈することの対象になり得ることを確認した。

「みなすこと」と「あてはめること」の促進を捉える枠組み、及び児童による問題場面の解釈を促進する方法は以下の通りである。

- ・ (暗黙裡に)仮定を設定することで導出されるモデルの差異に焦点を当て、数学的ではない手段によって表現されたモデルである「前数学的モデル」から、数学的手段によって表現されたモデルである「数学的モデル」への変容、及び数学的モデルそれ自体がより洗練されたものへ変容したことを「みなすこと」が促進されたと捉える。
- ・ 得られた結論を修正する過程と結論を導出する際に表出する様々な価値観に焦点を当て、一つの価値観に基づいて結論を導くことから、相反することのない複数の価値観、相反する複数の価値観に基づいて結論を評価、検討することで結論を修正することへ変容したことを「あてはめること」が促進されたと捉える。
- ・ 児童による問題場面の解釈を促進するために、次の二つの手立てを講じる。第一に、問題場面の構造に関する手立てで、はじめの問題場面の条件を変更したり新たな条件を加えたりすることで作成された別の問題場面を与えることである。第二に、他者との相互作用に関する手立てで、他者との相互作用の機会を意図的に設定することである。

第4章では、「みなすこと」に焦点を当て、児童による問題場面の解釈を促進する方法を実践的に明らかにした。はじめに、児童による問題場面の解釈の実際を明らかにするために、一番混んでいる花壇を選ぶという「球根の混み具合」に関する質問紙調査を実施した。その結果、問題場면을多様に解釈し得るという意味で、児童が問題場面の解釈に関して有能であることが明らかにされた。また、学年間の傾向を見ると、「単体量あたりの大きさ」を既習か未習かによって、問題場面の解釈の違いが生じることが明らかにされた。その一方で、全体の7割を超える児童が、他の問題場面に

においても有用であるとはいえない前数学的モデル(図の見た目の状態や、自身の経験に基づく表現)と加法的モデル(球根の数あるいは花壇の面積の一量の差で比較する解法)を導出していたことも示された。次に、これらの結果を踏まえ、質問紙調査を実施した児童たちの中から抽出した5年生のペアと6年生のペアを対象として教授実験を実施した。そして、その教授実験から得られた知見に基づき、事前に考察した促進の方法を再検討し、精緻化した。

第4章で明らかにした「みなすこと」を促進する方法を要約すると次の通りである。

- ・ 児童による「みなすこと」を促進するためには、導出したモデルが類似した構造を持つ他の問題場面においても再利用可能であるかどうかを確認させるために、球根の配置状態を変更した図を提示したり、新たな花壇を追加したりするようにより、条件を変更した問題場면을提示することが有効である。
- ・ 他者との相互作用の機会を意図的に設定することによって、児童たちが互いに考えを説明し、理解し合う際に、自身によるモデルの問い直し・見直しをすることが促される。その結果、児童による「みなすこと」が促進することが期待される。
- ・ 混み具合を比較する際には、二量の間には比例関係があると仮定することが必要である。その仮定を顕在化させるためには、花壇の面積を規則的に大きくした場合に、球根の数がどのように変化するかを調べるという問題場면을提示し、暗黙的に比例関係を仮定していたことに目を向けさせることが有効である。

第5章では、「あてはめること」に焦点を当て、児童による問題場面の解釈を促進する方法を実践的に明らかにした。はじめに、児童による問題場面の解釈の実際を明らかにするために、必要な長いすの数を求めるという「余りのあるわり算」に関する質問紙調査を実施した。その結果、問題場면을多様に解釈し得るという意味で、児童が問題場面の解釈に関して有能であることが明らかにされた。また、学年間の傾向を見ると、「余りのあるわり算」を既習か未習かによって、問題場面の解釈の違いが生じることが明らかにされた。一方、全体では、一般的に正答とされる解答に見られる価値観である「一般性」(もとの問題場面で与えられた条件を遵守する)を示した児童の割合が大きかった。この価値観に基づくことで正答を導くことは可能であるが、例えば、社会的価値観の「同情」(1人で長いすに座るのは可哀想である)に基づいて結論を導いた児童を納得させることはできないため、適切であるとはいえない。次に、これらの結果を踏まえ、質問紙調査を実施した児童たちの中から抽出した3年生のペアと4年生のペアを対象として教授実験を実施した。そして、その教授実験から得られた知見に基づき、事前に考察した促進の方法を再検討し、精緻化した。

第5章で明らかにした「あてはめること」を促進する方法を要約すると次の通りである。

- ・ 児童による「あてはめること」を促進するためには、長いすの条件を追加したり、長いすを運ぶ人数を設定したりするようにより、新たな条件を追加することで、はじめの問題場面とは異なる問題場면을提示することは有効である。さらに、自身とは異なる他の価値観に焦点化させることで、よりよく「あてはめること」を促進できることが期待される。
- ・ 他者との相互作用の機会を意図的に設定することで、児童たちは新たな価値観を知ることができる。新たな価値観の知覚が、必ずしも結論の妥当性を確認したり、結論を修正したり

することにつながるとはいきれないものの、他者による価値観と自身による価値観との関係を考えるように促すことで、結論の評価、検討を促すことが期待される。この点で、児童による「あてはめること」を促進するために、他者との相互作用の機会を積極的に設定することには意義がある。

第6章では、第4章及び第5章の教授実験の結果を総合的に考察し、数学的モデル化能力を育成する学習指導について、教材のあり方と教師の役割から議論した。前者に関しては、問題の条件と目標を反復的に理解するためには、本調査問題のように、問題場面の構造を変え、児童がその問題場面の本質を探究するように促すことが重要であり、かつて川口によって提案されたように、数理の系統を踏まえつつ、問題解決的な性格を持つ学習を行うことは可能であることを指摘した。このことから、数学的モデル化に関する研究の多くは、レリバンスを中心としたカリキュラムを実現するものであるのに対し、本研究における結論は、経験主義と系統主義の流れを汲むカリキュラム構成の示唆を与えることが期待された。そして後者に関しては、教師が授業において、完全には構造化されていない問題や反例となる問題場면을提示することは、児童が問題場面の理解を深めていくことが期待されるという点で有用であることを述べた。また、授業において、異なる価値観を持つ児童同士による議論の場を積極的に設けることにより、児童はこれまでにない新たな価値観を知ったり、それに基づいて結論を修正したりすることができ、問題場面の理解を深め得ることを指摘した。

4. 今後の課題

本研究の今後の課題は、次の三点である。第一は、本研究における調査問題とは異なる題材や授業場면을研究対象とし、明らかにした促進の方法を精緻化することによって、より詳細な教授への示唆を得ることである。第二は、本研究の結論に基づく指導を断続的に受けた児童が、教授的介入を受けずに、自ら問題場面を解釈できるようになるのかというように、ある児童の数学的モデル化能力の経年変化を長期的に捉えることである。第三は、初等教育段階における数学的モデル化に関するカリキュラム構成を考察することである。

5. 主要引用・参考文献

- 川口 延 (1957). 「算数科における問題解決学習と系統学習:問題解決学習か系統学習か」. 中野 佐三(編), 『算数科の教育心理』(pp. 39-76). 東京:金子書房.
- 三輪 辰郎 (1983). 「数学教育におけるモデル化についての一考察」. 『筑波数学教育研究』, 第2巻, pp. 117-125.
- Blum, W. (1991). Applications and modelling in mathematics teaching: A review of arguments and instructional aspects. In M. Niss, W. Blum, & I. Huntley (Eds.), *Teaching of mathematical modelling and applications* (pp. 10-29). Chichester: Ellis Horwood.
- Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age.