

氏名	Caalim, Jonathan Villaroza
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	博甲第 8015 号
学位授与年月日	平成 29 年 3 月 24 日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
審査研究科	数理物質科学研究科
学位論文題目	

Rotational beta expansion（回転ベータ展開について）

主査	筑波大学教授	学術博士	秋山茂樹
副査	筑波大学教授	理学博士	森田純
副査	筑波大学講師	理学博士	星野光男
副査	筑波大学講師	理学博士	三河寛

論 文 の 要 旨

ベータ展開は二進展開の非整数を底とする数系への拡張を与える。対応する写像は単位区間からそれ自身への区分的な線形拡大写像であり、数論とエルゴード理論の共通部分として古くから様々な研究があり、現在も活発に研究が進められている。

以下高次元格子の基本領域を固定する。本論文のタイトルの回転ベータ展開はベータ展開の一般化で相似拡大写像の基本領域への引き戻しとして定義されている。ベータ展開においてはルベーク測度に関して絶対連続な不変測度は一意であり、その不変測度はルベーク測度と同等である。しかし回転ベータ展開では同等性も一意性も一般には成立しない。そこで同等性や一意性の成り立つための十分条件が問題となる。

本論文では主結果として基本領域に関する緩やかな仮定のもとで拡大率が次元より1以上大きいならばこの二つの性質が成立するという事実が証明されている。これは少なくとも一次元では最善である。さらに論文では特に2次元の場合に拡大率の詳しい下からの評価が幾何学的考察により導かれている。証明では与えられた点の逆像の基本領域での分布を研究することが重要であり、それを調べるために Tarski が考察し Bang が証明した凸領域の分割に関する興味深い性質を用いている。

論文ではさらに古典的ベータ展開で行われている記号力学系との対応関係を考察し特に二次元及び三次元の場合に対応する記号力学系が Sofic となるための代数的な十分条件が導かれている。Sofic なケースは不連続点の逆像の生成する基本領域の分割がマルコフ分割を与える場合であり、それ自体が自己相似タイル張りの置換規則を生成するので、高次の回転対称性を持つ自己相似タイル張りの生

成法を与えていることになる。

審 査 の 要 旨

〔批評〕

回転ベータ展開は一樣拡大的な写像でありエルゴード的不変測度の有限性と、それらの測度の台が内点を共有しないことは辻井、Buzzi, Keller, Saussol らにより証明されている。しかし数論的な応用を考えると複数のエルゴード的絶対連続測度が存在するシステムは望ましくなく、本論文で導かれた比較的簡単な十分条件は今後の研究に役に立つものと考えられる。高次の区分線形拡大的な写像に関して、不変測度の一意性を問題にすること自体がこれまであまり行われていない研究である。おそらくその理由は高次元の不連続線の分布の取り扱いが難しい事である。数論とエルゴード理論の橋渡しを考える際にこのような問題意識は今後も重要と思われる。さらに証明に用いられた Bang による凸領域の分割に関する幅の劣加法性はそれ自体が興味深い技巧である。

さらに論文では K.Scheicher, P.Surer による特殊なケースで、うまく基本領域をとって平行移動が整数ベクトルのみになる場合も考慮されている。この場合には不変測度の一意性、ルベーグ同等性は、一般の場合よりも広い範囲で成立することが確かめられている。これは見かけが簡単な写像であっても問題はととも複雑になりえる良い例である。

双曲的写像のマルコフ分割の存在は力学系の研究では基本的事実であるが、その具体的構成は容易ではなく、とくに数論的なアルゴリズムで具体化することは、純周期軌道の記述などで応用上重要である。本論文で行なわれた Sofic な回転ベータ展開は、簡単な代数的条件のもと多数の自己相似タイル張りとして具体的に記述可能なマルコフ分割を与える。ここで示されているのは代数的で汎用性の高い十分条件であり、任意位数の一の冪根による回転作用をもつ Sofic な回転ベータ展開が存在することが導かれる。一般高位数の回転対称性を持つ Sofic システムがこのように簡単に構成可能なこと自体が専門家に驚きをもって迎えられている。これまで3次元以上の自己相似タイル張りの構成法自体があまり多く知られていないことを考えればこの結果は、自己相似タイル張りの構成という観点だけから見ても重要な一歩であると考えられる。

〔最終試験結果〕

平成 29 年 2 月 15 日、数理物質科学研究科学学位論文審査委員会において審査委員の全員出席のもと、著者に論文について 50 分間の説明を求め、さらに関連事項につき詳しい質疑応答を行った。その結果、審査委員全員によって、合格と判定された。

〔結論〕

上記の論文審査ならびに最終試験の結果に基づき、著者は博士(理学)の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。