氏　　名	櫻井　陽平
学　位　の　種　類	博　士　（　理　学　）
学　位　記　番　号	博　甲　第　8013　号
学位授与年月日	平成　29 年　3 月　24 日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
審　査　研　究　科	数理物質科学研究科
学　位　論　文　題　目	

Rigidity of manifolds with boundary under a lower weighted Ricci curvature bound
（重み付きリッチ曲率が下に有界な境界付き多様体の剛性）

主　　査	筑波大学　准教授	理学博士	田崎　博之
副　　査	筑波大学　講師	博士（数理学）	永野　幸一
副　　査	筑波大学　教授	博士（理学）	井ノ口　順一
副　　査	筑波大学　講師	博士（数学）	相山　玲子

論　文　の　要　旨

審査対象論文は、重み付きリッチ曲率が下に有界な境界付きリーマン多様体の大域幾何構造を研究している。本論文は、著者が発表した4本の研究論文を纏めた包括的な総合論文として執筆されている。著者は、重み付きリッチ曲率が下に有界な境界付きリーマン多様体に対して、境界の重み付き平均曲率の下からの有界性の仮定のもと、比較幾何学を展開して様々な比較定理や剛性定理を証明している。

大域リーマン幾何学において、比較幾何学とは、定曲率空間などを参照空間として、参照空間の性質を用いて、研究対象である空間の幾何学的性質を解き明かしていく分野である。今世紀に入り、比較幾何学の観点から、重み付きリッチ曲率が下に有界なリーマン多様体の大域幾何構造が盛んに研究されている。元来、通常のリッチ曲率が下に有界な境界の無いリーマン多様体に対して、比較幾何学として、様々な比較定理や剛性定理が研究されてきた。例えば、球面の直径との比較である Bonnet-Myers の直径比較定理や、定曲率空間の体積増大度との比較である Bishop-Gromov の体積比較定理が知られている。また、剛性定理として、球面を特徴づける Cheng の最大直径定理や、ユークリッド空間の構造の存在性を特徴づける Cheeger-Gromoll の分裂定理が名高い。これらの定理は、最近では、Wei-Wylie、Wylie、Wylie-Yeroshkin 等により、重み付きリッチ曲率が下に有界なリーマン多様体に対して一般化されている。

一方で、リッチ曲率が下に有界な境界付きリーマン多様体に対しては、1980年前後に、境界の平均曲率の下からの有界性の仮定のもと、Heintz-Karcher や加須栄等によって比較幾何学の先駆的な研究が行われており、基本的な比較定理や剛性定理が証明されていた。本論文中の重み付きリッチ曲率に関す

る研究は、Heintz-Karcher や加須栄等の研究の一般化としての側面を持っている。

本論文における研究内容は、以下に述べる通りである。著者は、重み付きリッチ曲率が下に有界な境界付きリーマン多様体に対して、主に次の2つの曲率条件を導入して比較幾何学を展開している。(1)内部の重み付きリッチ曲率と境界の重み付き平均曲率が、それぞれある定数以上である場合。(2)内部の重み付きリッチ曲率と境界の重み付き平均曲率が、それぞれ密度関数で下から制御されている場合。これらの曲率条件のうち、内部の曲率条件は、Wei-Wylie、Wylie、Wylie-Yeroshkin 等による境界が無い場合の最近の研究の条件と一致するものである。

著者は、主な結果として、曲率条件(1)または曲率条件(2)を満たす境界付きリーマン多様体に対して、以下の5つの各定理を証明している。(A)内在半径剛性定理、(B)分裂定理、(C)境界の近傍の体積増大度剛性定理、(D)重み付き p ラプラシアンのディリクレ最小固有値剛性定理、(E)重み付き p ラプラシアンのスペクトラム下限剛性定理。また同時に、各々の曲率条件の場合に、内在半径比較定理、境界の近傍の体積増大度比較定理、重み付き p ラプラシアンのディリクレ最小固有値比較定理、さらに重み付き p ラプラシアンのスペクトラム下限比較定理を証明している。

本論文の研究の要点の1つは、境界からの距離関数の幾何解析を精密に行っている点である。著者は、2つの曲率条件の各々の場合に、境界からの距離関数のラプラシアンの比較定理を研究している。その1つは内部の微分可能な点における局所的な比較定理であり、もう1つは超関数の意味での大域的な比較定理である。また、これらの定理を示すため、境界からの距離関数の切断跡の構造を調べている。

本論文の構成は次の通りである。第1章では、研究の背景や経緯とともに、本論文の主な定理と研究の要点が述べられている。第2章では、本論文に必要な基本的な概念や用語が説明されている。第3章では、境界からの距離関数の切断跡の構造が調べられている。第4章と第5章では、境界からの距離関数のラプラシアンの比較定理が研究されており、第4章では内部の微分可能な各点における局所的な比較定理、第5章では超関数の意味での大域的な比較定理が示されている。第6章、第7章、第8章、第9章、第10章では、各章毎に、(A)内在半径剛性定理、(B)分裂定理、(C)境界の近傍の体積増大度剛性定理、(D)重み付き p ラプラシアンのディリクレ最小固有値剛性定理、(E)重み付き p ラプラシアンのスペクトラム下限剛性定理が証明されている。第11章では線分不等式が研究され、第12章では境界の近傍の測度収縮性質が研究されている。

なお、曲率条件(1)のもとで得られている定理(A)から定理(E)までは、著者の1本目と2本目の研究論文の内容に相当している。加須栄による先行研究では、重みの無しの場合に定理(A)、定理(B)および p が2である場合の定理(D)が得られていた。曲率条件(2)のもとで得られている定理(A)から定理(E)までは、著者の3本目と4本目の研究論文の内容に相当している。

審　査　の　要　旨

〔批評〕

審査対象論文は、重み付きリッチ曲率が下に有界な境界付きリーマン多様体の大域幾何構造を研究しており、境界の重み付き平均曲率の下からの有界性の仮定のもと、比較幾何学を展開して様々な比較定

理や剛性定理を証明している。本論文中の研究内容は数学的にすべて正しい。本論文中の定理は、理論の土台となり得る研究成果であり、将来的にさらなる発展が期待できる。本論文は、高い水準にあり、数理物質科学研究科博士学位論文の基準に十分達するものと判断する。

本論文中の研究の動機付けは、リッチ曲率に重みを付け、境界付きリーマン多様体に対して、先行研究を発展させる試みであり、広く受け容れられるものである。Bakry-Émery の研究に端を発する重み付きリッチ曲率は、今世紀に入り、Lott-Villani や Sturm 等の重み付きリッチ曲率の下からの有界性と同等の性質を持つ測度距離空間の研究や、リッチ流の理論において重要なリッチソリトンの幾何学などにおいて自然に現れており、様々な分野から注目されている。通常のリッチ曲率が下に有界な境界付きリーマン多様体に関する Heintz-Karcher や加須栄等の先駆的な研究の一般化として、重み付きリッチ曲率が下に有界な境界付きリーマン多様体に対して比較幾何学を展開することは、重要な研究課題である。

本論文の研究内容が高く評価される理由は、以下に述べる3つの根拠にある。

第1の根拠は、重み付きリッチ曲率が下に有界な境界付きリーマン多様体に対して、境界からの距離関数を解析して幾何構造の研究に応用している研究手法である。大域リーマン幾何学では、標準的な研究手法として、境界からの距離関数ではなく、1点からの距離関数を解析して幾何構造の研究に役立てることが多い。本論文中の研究手法とその研究成果は、これまであまり広く注目されて来なかった着想を実現して推進するものであり、将来性を感じることができる。

第2の根拠は、参照空間として境界付きリーマン歪み積多様体が選ばれている点である。従来の比較幾何学では、定曲率空間に代表されるリーマン捩れ積多様体を参照空間とすることが多い。リーマン歪み積多様体は、リーマン捩れ積多様体の一般化である。本論文では参照空間として境界付きリーマン歪み積多様体を採用しており、本論文中の剛性定理は剛性現象が現れる際には歪みが消えることも主張している。このことは、重み付きリッチ曲率が下に有界な境界付きリーマン多様体の比較幾何学が豊かな内容を持つことを示唆する。

さらに、第3の根拠として、本論文中の議論における複雑な計算を確実に遂行するための優れた洞察力が挙げられる。境界からの距離関数を解析して重み付きラプラシアンの比較定理を得る際には、従来の研究と比べてはるかに複雑な計算が必要になっている。このことを成し遂げるためには、単なる計算力のみではなく、理論の構築過程で裏付けされた優れた洞察力が要求されている。

本論文は、著者がこれまでに発表した4本の研究論文を纏め上げた包括的な総合論文である。これらの研究論文は、高く評価されている。1本目の研究論文は学術雑誌「Osaka Journal of Mathematics」に掲載決定済みである。1本目の研究論文の内容は、1980年代前半に行われた加須栄による先駆的な研究の継承研究である。2本目の研究論文は学術雑誌「Tohoku Mathematical Journal」に掲載決定済みである。2本目の研究論文の内容は、重み付きリッチ曲率が下に有界な境界付きリーマン多様体の比較幾何学の嚆矢と看做せる研究である。3本目の研究論文の内容は、最近の Wylie による境界の無い場合の研究を境界がある場合に発展させている研究である。4本目の研究論文の内容は、つい最近の Wylie-Yeroshkin による境界の無い場合の研究を境界がある場合に発展させている研究である。3本目と4本目の研究論文は、各々相応しい学術雑誌に現在投稿中であるが、掲載決定される可能性が高いと判断する。

なお、本論文で述べられている研究内容は、著者が日本学術振興会特別研究員（DC1）として研究を

遂行した成果である。

〔最終試験結果〕

平成29年2月14日、数理物質科学研究科学位論文審査委員会において審査委員の全員出席のもと、著者に論文について説明を求め、関連事項につき質疑応答を行った。その結果、審査委員全員によって、合格と判定された。

〔結論〕

上記の論文審査ならびに最終試験の結果に基づき、著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。