

氏名	平木 正俊
学位の種類	博士 (理学)
学位記番号	博甲第 8009 号
学位授与年月日	平成 29 年 3 月 24 日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
審査研究科	数理物質科学研究科
学位論文題目	Some topics in topological dynamics (位相力学系における種々の問題について)

主査	筑波大学教授	理学博士	加藤久男
副査	筑波大学教授	理学博士	川村一宏
副査	筑波大学准教授	博士(数理学)	平山至大
副査	筑波大学講師	博士(理学)	石井 敦

## 論 文 の 要 旨

本論文は、位相力学系および幾何学的トポロジーの主要な研究テーマであるカオス力学系理論と一般化された逆極限空間について論じたものである。位相力学系および幾何学的トポロジー研究は20世紀前半から現在まで多くの数学者によって研究され大きな進展を見せている。本論文では、まず物理学に登場するダークマター概念から着想を得た空間である dark space, bright space を定義し、それを使って空間の力学的な分解定理を得ている。また、逆極限空間は幾何学的トポロジー、およびカオス的な力学系理論に登場する基本的で重要な概念であるが、本論文では一般化された逆極限空間の研究を行い、dimensionally stepwise space の概念を新たに定義し、こうした逆極限空間の多くが dimensionally stepwise space であることを証明している。また、一般化された逆極限空間の位相次元および ANR 性についても詳しい結果を得ている。以下、各章ごとに内容を述べる。

第1章、第2章では本論文で必要な諸概念を定義している。

第3章では、位相力学系に関係する空間の分解定理を研究している。あるカオス的な力学系(たとえば0次元周期点集合をもつ力学系)において、最近の物理学に登場するダークマターにヒントを得たダーク空間を定義し、全体空間がダーク空間でほとんど覆われていることを証明している。部分空間  $D$  がダーク空間であるとは、力学系の各点の軌道が  $D$  上にほとんど存在しないような空間として定義される。本論文では先ず、 $n$ 次元空間

上の同相写像で周期点集合の次元がゼロ次元以下であれば、ゼロ次元  $G$ -デルタ集合である bright space と  $(n-1)$ 次元  $F$ -シグマ集合となる dark space に分解されることを証明している。次に、このダーク空間に衝突する回数で軌道を分類することで、全体空間が力学的に不変なゼロ次元空間で  $(n+1)$ 個の空間に分解されることを証明している。位相力学系は微小な変化で 0次元周期点集合をもつ力学系に変化することが数学的に証明されており、この定理は非常に一般的な条件で成立する結果と考えられる。こうした結果は、位相次元論でよく知られたゼロ次元分解定理を力学系理論との関係で論じたものであり、大変興味深い定理となっている。

第4章では、一般化された逆極限空間の種々の位相的性質を研究している。得られた主な結果としては、ある幾つかの index を定義し、その index が有限であれば逆極限空間は有限次元であり、更に dimensionally stepwise space になることを証明している。有限次元空間  $X$  が dimensionally stepwise space とは、任意の1から  $\dim X$  までの自然数  $k$  に対し、次元が  $k$  となる開部分空間を含むことである。特に、逆極限空間が多面体であれば、必然的に dimensionally stepwise な多面体となることを証明している。ANR および AR 性は幾何学的トポロジーで非常に重要な概念であるが、本論文ではグラフ上の一般化された逆極限空間の ANR, AR 性を詳しく研究した定理を得ている。実際、bonding map が cell-like であり、ある種の条件を満たす場合には、得られた逆極限空間は ANR となることを証明している。この定理を使って、逆極限空間がデンドライト(樹木)になるための非常に一般的な条件を求めることに成功している。また、関連する興味深い幾つかの反例を与えている。

## 審 査 の 要 旨

### 〔批評〕

この論文は、位相力学系およびトポロジーの主要な研究テーマであるカオス力学系理論と逆極限理論に大きく貢献するものである。力学系に関して本論文で得られた種々のゼロ次元分解定理は、大変興味深いものであり、その後続く研究や多くの応用が期待される定理である。また、一般化された逆極限に関する定理は世界の最先端の研究であり、この論文で展開された手法は特に新しく、興味ある着想に富んでいる。本論文は、その成果と手法を通して、この方面の今後の発展に大いに寄与するものと考えられる。本論文の基となった論文は2編で、1編はすでに国際的な数学専門誌に出版されており、他の論文1編も現在投稿中である。

### 〔最終試験結果〕

平成 29 年 2 月 13 日、数理物質科学研究科学学位論文審査委員会において審査委員の全員出席のもと、著者に論文について説明を求め、関連事項につき質疑応答を行った。その結果、審査委員全員によって、合格と判定された。

### 〔結論〕

上記の論文審査ならびに最終試験の結果に基づき、著者は博士(理学)の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。