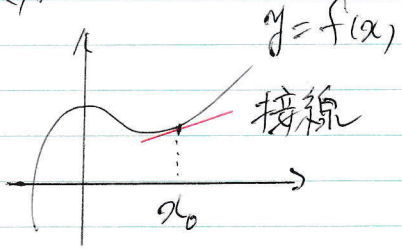
微積分演習 第9回

微分



傾きが微分係数

曲がっているのは嫌

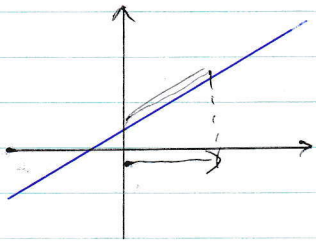
⇓

まっすぐなものでおきかえよう

2変数

$z=f(x,y)$　接平面でおきかえる.

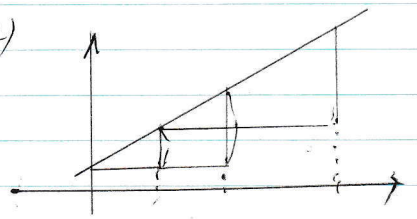
まっすぐなものを代数的に考える.
直線の機能とは……



$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$　$xe_1+\boxed{f(x)}e_2$ が直線に含まれるような $f(x)$ が1つ定まる.

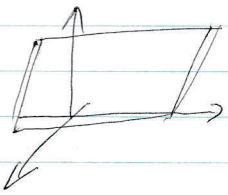
$e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$　$x\mapsto f(x)$　線型写像

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$$
$$f(\alpha x_1)=\alpha f(x_1)$$



逆に
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 線型写像とする.
$\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}$ は直線を表す.

平面の場合.



$x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + \boxed{z}\mathbf{e}_3$ が平面に入るよう z が1つ定まる.

$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$
$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + f(x,y)\mathbf{e}_3$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto f(x,y)$ 線型写像

逆に $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 線型写像とする.

$\begin{pmatrix}x\\y\\f(x,y)\end{pmatrix}$ は平面を表す.

直線も平面は線型写像と考えられる.
高次元でも使える考え方である.

線型代数

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) & x, y \in \mathbb{R}^2 \\ f(\alpha x) = \alpha f(x) & \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

が成り立つとき f: 線型写像という.

$x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ とする。

$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を用いて $x = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ と書ける。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2) \\
&= f(x_1 e_1) + f(x_2 e_2) \\
&= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2)
\end{aligned}
$$

$f(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $f(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ と表す。

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ のように数を並べたものを
2×2 の行列 という
(2行2列)

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{pmatrix}$ と計算する.

今度は、$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 線型写像全体を考える.

$$
\boxed{\begin{array}{l} \text{線型写像 } f, g \text{ に対して足し算を} \\ (f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ と定義する.} \end{array}}
$$

これが再び線型写像になることをいう.

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x+y) &= f(x+y) + g(x+y) \\
&= f(x) + f(y) + g(x) + g(y) \\
&= \underline{f(x) + g(x)} + \underline{\underline{f(y) + g(y)}} \\
&= (f+g)(x) + (f+g)(y)
\end{aligned}
$$

問題 I

スカラー倍について

$(f+g)(\alpha x) = \alpha (f+g)(x)$ を示せ.

線型写像 f に対して、スカラー倍を
$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ と定義する。

問題 II
αf が線型写像であることを示せ。

線型写像

$$f \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad g \leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

(1,1)成分　(1,2)成分
(2,1)成分　(2,2)成分

$$(f+g)(e_1) = f(e_1) + g(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} \\ a_{21}+b_{21} \end{pmatrix}$$

$$(f+g)(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12}+b_{12} \\ a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

$$f+g \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

成分ごとの足し算

$$\alpha f \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$$

$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 線型写像とする。

合成 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ は線型

確かめると、
$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x+y) &= g(f(x+y)) \\
&= g(f(x) + f(y)) \\
&= g(f(x)) + g(f(y)) \\
&= (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)
\end{aligned}
$$

スカラー倍のほうも確かめられる

f $\leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$　g $\leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ と対応しているとき、$g \circ f$ がどうなるか見る。

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(e_1) &= g(f(e_1)) \\
&= g\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}\right) \\
&= g(a_{11} e_1 + a_{21} e_2) \\
&= a_{11} g(e_1) + a_{21} g(e_2) \\
&= a_{11} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{11} a_{11} + b_{12} a_{21} \\ b_{21} a_{11} + b_{22} a_{21} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
(g \circ f)(e_2) = \begin{pmatrix} b_{11} a_{12} + b_{12} a_{22} \\ b_{21} a_{12} + b_{22} a_{22} \end{pmatrix}
$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & \\ & \end{pmatrix}$$

(注) 行列のかけ算では $AB \neq BA$

問題 III

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$ を計算せよ.