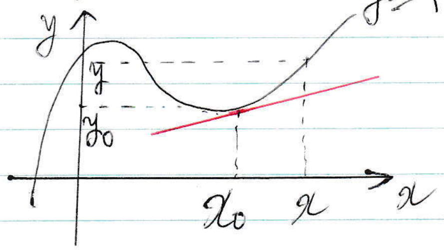
No. 1

Date '17 6.8

微積分演習 第8回

多変数の微分

- 1変数



考え方
曲がっているのは嫌
⇓
まっすぐなもので
おきかえよう

$$\Delta x = x - x_0$$
$$y - y_0 = \Delta y$$

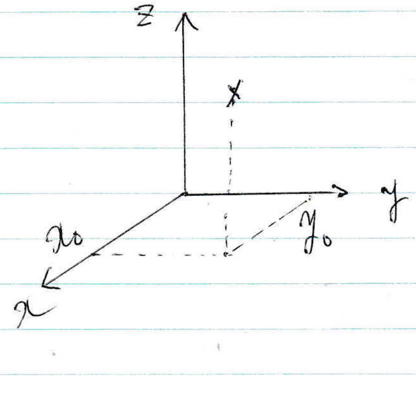
$\Delta x \mapsto \Delta y$ の関数は一般に複雑

接線では $y - y_0 = a(x - x_0)$ 比例

$$a = f'(x_0)$$

- 2変数

$z = f(x, y)$



(x_0, y_0, z_0) を通る平面

◎ $z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$

今，$y = y_0$ に固定する

$z = f(x, y_0)$
x を z に対応させる関数

$a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ x方向の偏微分

同様に $x=x_0$ とする

$$b=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$ y方向の偏微分

例) $f(x,y)=3x^2y^3$ のとき

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6xy^3,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=9x^2y^2$$

a, b 2つで、接平面が決まる

- 3変数

$u=f(x,y,z)$

4次元が必要となって、グラフが描けない。
代数的に考える

1変数 $\Delta x \longmapsto a\Delta x$
2 〃 $(\Delta x, \Delta y) \longmapsto a\Delta x + b\Delta y$
3 〃 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \longmapsto a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z$

$$a=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$$
$$b=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$$
$$c=\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$$

多変数の関数 $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を考える

$n=1,\ m=2$ のとき 平面上の運動
$n=1,\ m=3$ のとき 空間内 〃
$m=1,\ n=2,3$ のとき 上でやった

$n=2,\ m=2$ のとき、

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y_1 = f(x_1, x_2)$$
$$y_2 = g(x_1, x_2)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix}}_{\text{行列}} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}\Delta x_2 \end{pmatrix}$$

まっすぐとは……
線型代数を使って下のように考える。

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ [$\mathbb{R}^n$に和、スカラー倍は定義されている]

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) & x, y \in \mathbb{R}^n \\ f(\alpha x) = \alpha f(x) & \alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

この条件をみたすとき
f : 線型写像 という。(まっすぐである)

$n=m=1$ の場合

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 線型写像 とする.

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases}$$

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x \underbrace{f(1)}_{= a \text{ とする}} = ax$$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 線型写像は 比例

$n=2$、$m=1$ の場合

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 線型写像 とする

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 \text{ と書ける.} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2) \\ &= f(x_1 e_1) + f(x_2 e_2) \\ &= x_1 \underbrace{f(e_1)}_{=a} + x_2 \underbrace{f(e_2)}_{=b \text{ とおく.}} \\ &= ax_1 + bx_2 \end{aligned}$$

問題

下の関数の $(2, 1)$ における接平面を求めよ.

(1) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

(2) $f(x, y) = x^3 - 3xy + 3y^2 - 5x + 2$