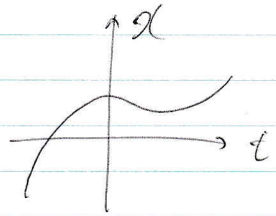
微積分演習 第7回

微分方程式とお友達になろう.



t の関数 $x(t)$ とする

$\boxed{x' = ax}$ (aは定数)

$x(t) = e^{at}$ は解の1つ.

一般解: $x(t) = Ce^{at}$ (Cは定数)

$x(0) = C$ (初期値)

$x' = ax$ をみたすものは上以外にはないことをいう.

$$\frac{x}{e^{at}} = xe^{-at}$$

積の微分より $(xe^{-at})' = x'e^{-at} + x(-ae^{-at})$

$$= axe^{-at} - axe^{-at}$$
$$= 0$$

よって $x = Ce^{at}$

微分方程式の解の一意性.

多くのことは微分方程式で記述される

Newton 力学

世界観

決定論, 自由意思.

$$\boxed{x' = ax}$$

たとえば 人口の変化を表している。

100万人 ⟶ 100万1000人
200万人 ⟶ 200万2000人

放射性元素の崩壊もこれに従っている $(a<0)$
但し、元素が大量にある場合で、統計的法則

半減期……時刻 0 の $\frac{1}{2}$ になる時間

$$x(T) = \frac{1}{2}x(0)$$

問題 I

$x' = ax \quad (a<0)$ に従っているとき、
半減期を求めよ。

答え. $T = -\dfrac{\log 2}{a}$

微分方程式 $\boxed{x' = x}$ に従っている場合を考える

$x(0) = C$ とする。

$d_1 \in D$

$$\begin{aligned} x(d_1) &= x(0) + x'(0)\,d_1 \quad \rfloor\ x'(0) = x(0) \\ &= C + C d_1 \end{aligned}$$

$d_1, d_2 \in D$

$$\begin{aligned} x(d_1+d_2) &= x(d_1) + x'(d_1)\,d_2 \quad \rfloor\ x'(d_1) = x(d_1) \\ &= x(d_1)\,(1+d_2) \\ &= C(1+d_1)(1+d_2) \\ &= C(1+d_1+d_2+d_1d_2) \end{aligned}$$

$d_1, \cdots\cdots, d_n \in D$

$$x(d_1 + \cdots\cdots + d_n) = c(1+d_1)(1+d_2)\cdots\cdots(1+d_n)$$
$$= c\{1 + (d_1 + \cdots\cdots + d_n) + (d_1 d_2 + \cdots\cdots) + (d_1 d_2 d_3 + \cdots\cdots) + \cdots\cdots + d_1 d_2 \cdots d_n\}$$

$d_1 + \cdots\cdots + d_n \in D_n$

$$d_1 d_2 + \cdots\cdots = \frac{(d_1 + \cdots\cdots + d_n)^2}{2}$$

$$d_1 d_2 d_3 + \cdots\cdots = \frac{(d_1 + \cdots\cdots + d_n)^3}{3!}$$ であるから

e^t の Taylor展開に近づく.

$x = \sin t$ とする.
$x' = \cos t$
$x'' = -\sin t$ であるから. 微分方程式 $\boxed{x'' = -x}$ をみたしている.

また. $x = \cos t$ も $x'' = -x$ をみたしている.

$x'' = -x$ の一般解は, $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$

$$x(0) = c_1$$
$$x'(0) = c_2$$

問題 II

微分方程式 $\boxed{x'' = -x}$ に従っているとする.

$x' = x$ のときと同じように計算してみよ.

$$x(d_1) = x(0) + x'(0) d_1$$
$$= c_1 + c_2 d_1$$

$x(d_1 + d_2) = \cdots\cdots$