微積分演習 第6回

Taylor展開

$$D_n = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^{n+1} = 0 \}$$

$$D = D_1 = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \}$$

$$d_1 \in D_n,\ d_2 \in D_m \implies d_1 + d_2 \in D_{n+m}$$

命題： $d_1, d_2, \cdots, d_n \in D \implies d_1 + d_2 + \cdots + d_n \in D_n$

証明） nに関する数学的帰納法

$n=1$

$$d_1 \in D \implies d_1 \in D_1 = D$$

$n \Rightarrow n+1$

$$\underbrace{d_1 + \cdots + d_n}_{\in D_n} + \underbrace{d_{n+1}}_{\in D_1} \in D_{n+1}$$

$\dashv$

$d_1, \cdots, d_n \in D$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x + d_1 + \cdots + d_n) &= f(x) + f'(x)(d_1 + \cdots + d_n) \\ &\quad + f''(x)(d_1 d_2 + \cdots\cdots) \\ &\quad + f'''(x)(d_1 d_2 d_3 + \cdots\cdots) \\ &\quad + \cdots\cdots \\ &\quad + f^{(n)}(x)\, d_1 \cdots d_n \\ &= f(x) + f'(x)(d_1 + \cdots + d_n) \\ &\quad + \frac{f''(x)}{2}(d_1 + \cdots + d_n)^2 \\ &\quad + \frac{f'''(x)}{3!}(d_1 + \cdots + d_n)^3 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(d_1 + \cdots + d_n)^n \end{aligned}$$

$d_1 + \cdots + d_n \in D_n$

n次の Taylor展開

fがn次多項式と仮定する.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n$$

$a_0 = f(0)$

$a_1 = f'(0)$ $\qquad f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots\cdots$

$a_2 = \dfrac{f''(0)}{2}$ $\qquad f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x$

$a_3 = \dfrac{f'''(0)}{3!}$

一般に. $a_i = \dfrac{f^{(i)}(0)}{i!}$

数II 多項式の微積分

数III $\sin, \cos, e^x \longleftarrow$ 無限次の多項式で書ける (認める)

$$f(x) = e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots$$

係数を決定していく.

$a_0 = f(0) = e^0 = 1$

$a_1 = f'(0) = e^0 = 1$

$a_2 = \dfrac{f''(0)}{2} = \dfrac{1}{2}$

$a_3 = \dfrac{f'''(0)}{3!} = \dfrac{1}{3!}$

$\vdots$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots$$

となる.

次に $f(x) = \sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots$

$$a_0 = f(0) = \sin 0 = 0$$
$$a_1 = f'(0) = \cos 0 = 1$$
$$a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{-\sin 0}{2} = 0$$
$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{-\cos 0}{3!} = -\frac{1}{3!}$$
$$a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = 0$$
$$a_5 = \cdots\cdots = \frac{1}{5!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\cdots$$ となる.

問題.
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\cdots$$ となることを確かめよ.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\cdots$$

$z = ix$ (純虚数) とする.

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots\cdots$$
$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots\right)$$
$$= \cos x + i \sin x$$

指数関数と三角関数 親せき.

指数法則

$$e^{z_1 z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$ を認めると

$$e^{i(x_1+x_2)} = e^{ix_1 + ix_2}$$
$$= e^{ix_1} e^{ix_2}$$
$$= (\cos x_1 + i\sin x_1)(\cos x_2 + i\sin x_2)$$
$$= \underline{\cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2}$$
$$+ i\underline{(\sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2)}$$

$$\underline{\cos(x_1+x_2)}$$
$$+ i\underline{\sin(x_1+x_2)}$$

指数法則と加法定理が
つながっている.

問題

指数法則を証明せよ.

$$e^{z_1+z_2} = 1 + (z_1+z_2) + \frac{1}{2}(z_1+z_2)^2 + \frac{1}{3!}(z_1+z_2)^3 + \cdots$$
$$e^{z_1} = 1 + z_1 + \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{3!}z_1^3 + \cdots\cdots$$
$$e^{z_2} = 1 + z_2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{3!}z_2^3 + \cdots\cdots$$

$e^{z_1}e^{z_2}$ と $e^{z_1+z_2}$ の $z_1^i z_2^j$ の係数を比較する.