No. 1

Date '17.5.18

微積分演習 第5回

初等関数の微分

多項式

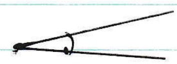
三角関数

角度 360度 (度数法)

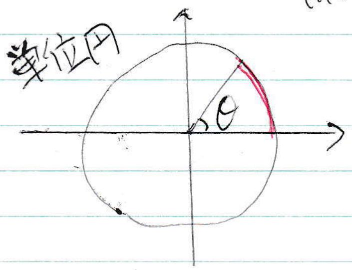
↓

ラジアン

合理的



開きは、弧の長さに
比例する。



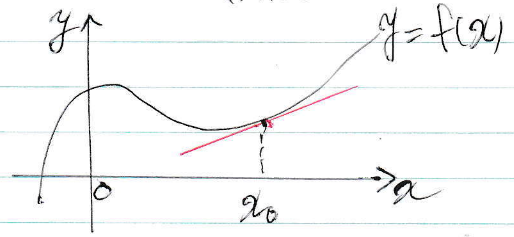
弧の長さで
角度をはかる。

→ ラジアン

Kock-Lowvere の公理

$$D=\{d\in\mathbb{R}\mid d^2=0\}$$

無限小

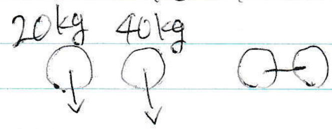


我々の立場では
(接点の近くで)
接線と曲線が一致

- 慣性の法則
  物体は力を受けなければ
  等速度運動する

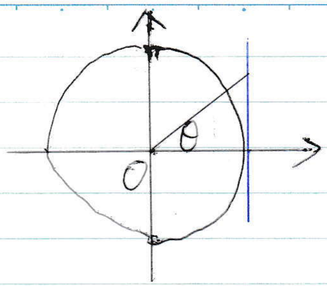
- 無限小の慣性の法則
  力を受けても、無限小の時間は
  等速度運動する。

ガリレオ
思考実験



重い物ほど速く落下 ?

つなぐと速くなる ?



$d \in D$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin d = d \\ \cos d = 1 \end{array}}$$

$$\begin{aligned} &\sin(x+d) \\ &= \sin x \underbrace{\cos d}_{=1} + \cos x \underbrace{\sin d}_{=d} \\ &= \sin x + d \cos x \end{aligned}$$

よって $(\sin x)' = \cos x$

問題 I

$\cos x$ の微分を求めよ.
($\cos(x+d)$ を計算する.)

高校では…. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ が出てきた.

指数関数

底 10

$$e = \lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

高校での定義

$\exists!\, a \in \mathbb{R}$
$\forall d \in D \quad 10^d = 1 + ad$

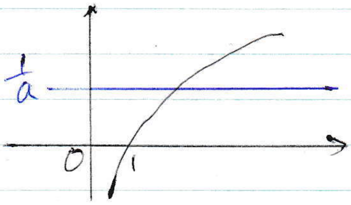
$e > 0$ とする.

$$\begin{aligned} e^d &= \left(10^{\log_{10} e}\right)^d \\ &= 10^{d \log_{10} e} \quad \in D \\ &= 1 + a(d \log_{10} e) \\ &= 1 + (a \log_{10} e)\, d \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} d \in D \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha d \in D$$

$\because\ (\alpha d)^2 = \alpha^2 d^2 = 0$

関数 $f(e) = \log_{10} e$ は単調増加



$\log_{10} e = \frac{1}{a}$ となるように
e を決める.

$f(x) = e^x$
$f'(0) = 1$

指数法則を使って.

$$\begin{aligned} e^{x+d} &= e^x \cdot e^d \\ &= e^x(1+d) \\ &= e^x + e^x d \end{aligned}$$

よって. $(e^x)' = e^x$

Taylor 展開

いえない

$d_1, d_2 \in D \not\Longrightarrow d_1 + d_2 \in D$

$(d_1+d_2)^2 = \underbrace{d_1^2}_{0} + \underbrace{d_2^2}_{0} + \underbrace{2d_1d_2}_{\neq 0}$

3乗すれば

$(d_1+d_2)^3 = \underbrace{d_1^3}_{0} + \underbrace{d_2^3}_{0} + 3\underbrace{d_1^2}_{0}d_2 + 3d_1\underbrace{d_2^2}_{0} = 0$

一般に. $D_n := \{ d \in \mathbb{R} \mid d^{n+1} = 0 \}$ と表す. $D = D_1$

$d_1, d_2 \in D_1 \Longrightarrow d_1 + d_2 \in D_2$ が成立.

問題II

$\boxed{\begin{array}{l} d_1 \in D_m \\ d_2 \in D_n \end{array} \Longrightarrow d_1 + d_2 \in D_{m+n} \text{ を示せ}}$

$(d_1+d_2)^{n+m+1}$ を計算する. (二項定理)

$$f(x+d_1) = f(x) + f'(x)d \qquad (d \in D)$$

$$f(x+d_1+d_2) = f(x+d_1) + f'(x+d_1)d_2 \qquad (d_1, d_2 \in D)$$

$$= f(x) + f'(x)d_1 + \{f'(x) + f''(x)d_1\}d_2$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$= f(x) + f'(x)(d_1+d_2) + f''(x)d_1d_2$$

$$= f(x) + f'(x)(d_1+d_2) + \frac{f''(x)}{2}(d_1+d_2)^2$$

$$f(x+d_1+d_2+d_3) = f(x+d_1+d_2) + f'(x+d_1+d_2)d_3 \qquad (d_1, d_2, d_3 \in D)$$

$$= f(x) + f'(x)(d_1+d_2) + f''(x)d_1d_2 + \{f'(x) + f''(x)(d_1+d_2) + f'''(x)d_1d_2\}d_3$$

$$= f(x) + f'(x)(d_1+d_2+d_3) + f''(x)\underbrace{(d_1d_2+d_1d_3+d_2d_3)}_{\frac{(d_1+d_2+d_3)^2}{2}} + f'''(x)\underbrace{d_1d_2d_3}_{\frac{(d_1+d_2+d_3)^3}{6}}$$

問題 III

$$\boxed{f(x+d_1+d_2+d_3+d_4) \text{ を計算せよ.} \quad d_1, \cdots, d_4 \in D}$$