Date '17 · 5 · 11

微積分演習 第4回

微積分

高校のやり方

17C 18C 19C

ニュートン オイラー

ライプニッツ

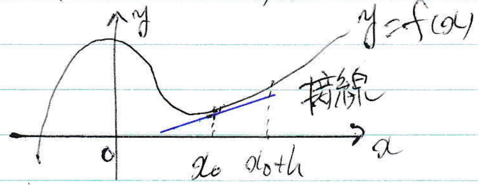
生物

DNA

遺伝子工学

17-18Cのやり方で (1変数 / 多変数) の微積分を学ぶ

・高校でのやり方



$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

平均の傾き

曲がっているのはイヤ

⇓

まっすぐでおきかえよう

極限を使って微分を捉える

極限の単元 ⇒ 微分

・17-18Cのやり方

$$h f'(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0)$$

$h\neq 0$ では一般に成り立たない

hが十分小さければ

$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)$ 直線.

$h^2=0$ となるくらい小さい

巾零無限小、という。

このようなhがたくさんあると考えた。

No. 2

Date

記号

$D = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \}$　　$d^2=0$ が成り立つような実数全体

実数　　$\neq \{0\}$

$\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}$　関数

唯一個存在　　任意

$$\boxed{\begin{array}{l}(\exists!\, a \in \mathbb{R})(\forall d \in D)\\ \quad \varphi(d) = \varphi(0) + ad\end{array}}$$

∃ 存在する　Existence

∀ 任意の　All

コック　ラヴィア

Kock - Lawvere の公理

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ とする.

$x_0 \in \mathbb{R}$

$\varphi : d \in D \longmapsto f(x_0 + d)$

$\varphi(0) = f(x_0)$

$\varphi(d) = f(x_0 + d)$

公理を適用すると.

$$\begin{array}{ccccc}\varphi(d) & = & \varphi(0) & + & a\,d\\ \| & & \| & & \in\\ f(x_0+d) & & f(x_0) & & \mathbb{R}\end{array}$$

$a = f'(x_0)$ と書く

微分係数

$(f+g)' = f' + g'$ の証明

極限を使うと.
(高校のやり方)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - \{f(x_0) + g(x_0)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

17-18C のやり方

$$f(x_0+d)+g(x_0+d) = f(x_0)+f'(x_0)d+g(x_0)+g'(x_0)d$$
$$= f(x_0)+g(x_0)+d\left(f'(x_0)+g'(x_0)\right)$$

dの係数が微分係数.

ライプニッツ

$(fg)' = f'g+fg'$ (Leibniz) の証明

高校のやり方 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$

思いつく必要がある

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$g(x_0+h)\cdot\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $\quad$ $f(x_0)\cdot\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$

$g(x_0+h)\to g(x_0)$, $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\to f'(x_0)$, $\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\to g'(x_0)$

$$= f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

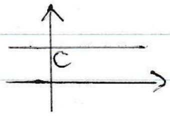
17-18Cのやり方

$$f(x_0+d)g(x_0+d) = \{f(x_0)+f'(x_0)d\}\{g(x_0)+g'(x_0)d\}$$
展開
$$= f(x_0)g(x_0)+d\{f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\}$$
$$+f'(x_0)g'(x_0)\underbrace{d^2}_{\approx 0}$$

よって $(fg)' = f'g+fg'$

初等関数を微分してみる.

(1) 定値関数 $f(x) = C$ (定数)



$$f(x_0+d) - f(x_0) = C - C$$
$$= 0$$
$$= 0 \cdot d$$

よって $f'(x_0) = 0$

(2) $f(x) = x$

$$f(x_0+d) - f(x_0) = (x_0+d) - x_0$$
$$= d$$
$$= 1 \cdot d$$

よって. $f'(x_0) = 1$

(3) $f(x) = x^2$

$$f(x_0+d) - f(x_0) = (x_0+d)^2 - x_0^2$$
$$= x_0^2 + 2x_0 d + \underbrace{d^2}_{\to 0} - x_0^2$$
$$= 2x_0\, d$$

よって $f'(x_0) = 2x_0$

(4) report

$f(x) = x^n$ を微分せよ.

($f(x_0+d) - f(x_0) = (x_0+d)^n - x_0^n$ を計算する.)