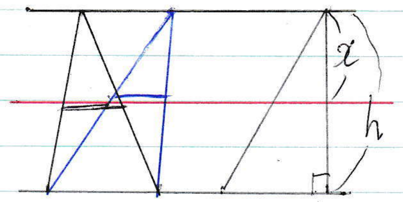
No. 1

Date '17・4・27

微積分演習 第3回

Cavalieriの原理

○平面図形



平行な2直線に囲まれたある図形を考える。

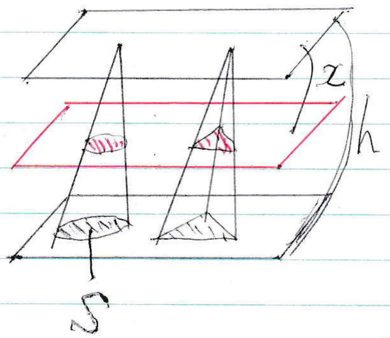
平行な直線で切ったときに断面の線分の長さが等しい

⟹ 面積が等しい

底辺と高さが同じ三角形

⟶ 面積は同じ

○空間図形



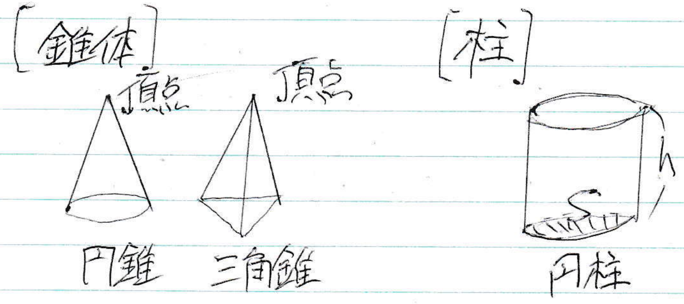
平行な2つの平面に囲まれた空間図形を考える。

平行な平面で切ったときに断面の面積が等しい。

⟹ 立体の体積は等しい。

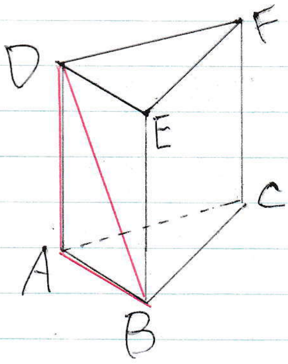
底面積と高さが同じ錐体

⟶ 体積は同じ。



体積 Sh

○ 錐体の体積を求める



図のような三角柱を

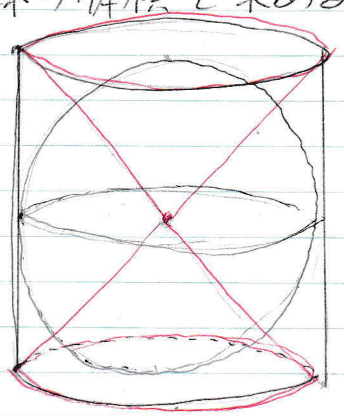
ABDC
BDEC
DECF

3つの三角錐に分ける.

問題
3つの三角錐の体積は等しいことを
Cavalieri の原理を用いて示せ.

錐体の体積 = 底面積 × 高さ × $\frac{1}{3}$ となる.

○ 球の体積を求める



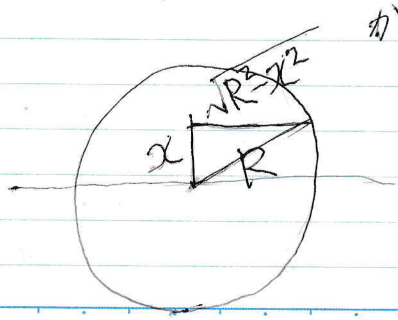
半径 R の球を考える.

図のように接する円柱の体積
$\pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$

2つの錐が合わさった立体
$2 \times \pi R^2 \times R \times \frac{1}{3} = \frac{2\pi R^3}{3}$

円柱から2つの錐を除いた部分
$2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$

これと球の体積が同じことを Cavalieri の原理から示す. 高さ x で切る.

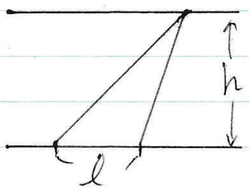


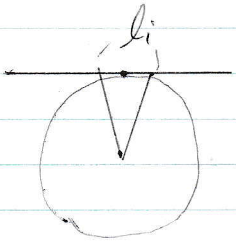
球の断面
$(\sqrt{R^2-x^2})^2 \times \pi = \pi(R^2-x^2)$

円柱から2つの錐を除いた部分の断面
$\pi R^2 - \pi x^2$

球の体積　$\frac{4}{3}\pi R^3$

○ 円は三角形である





錐形　$\frac{1}{2}lh$

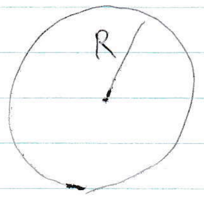
$\underbrace{2\pi R}_{底辺} \times \underbrace{R}_{高さ} \times \frac{1}{2}$

高さ……接線と中心の距離

無限小の三角形を足し合わせる

$$\sum \frac{1}{2} l_i R = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\sum l_i}_{円周\ 2\pi R}\Big) R = \pi R^2$$

○ 球は錐体である



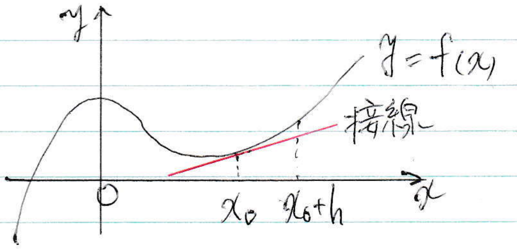
$$\frac{1}{3}\underbrace{S}_{底面積（球の表面積）}\underbrace{R}_{高さ} = \frac{4}{3}\pi R^3$$ 球の体積

$$S = 4\pi R^2$$

微分

17-18C と 19C以降 は 微分の考え方が異なる.

無限小　　　極限



$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

$f(x_0+h)-f(x_0) = hf'(x_0)$
は一般には成り立たない
($h=0$ のときだけ)

17-18C
h が十分小さければ成り立つ
$h^2=0$ となるくらい小さい