No. 1
Date '17・6・22

微積分演習 第10回

多変数の微積分

理工系 1年 $\left\{ \begin{array}{l} \text{微積分} \\ \text{線型代数} \end{array} \right.$

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$x \in \mathbb{R}^n$ で微分する $\Longrightarrow$ $f'(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

線型写像

特に、$n = m = 1$ のとき、

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は比例

一般には

$$\begin{array}{cc} m & \begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & & \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix} \\ & n \end{array}$$

$m \times n$ の行列

$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ と分ける。 $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_i(x_1, \cdots\cdots, x_n)$

n 変数

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

高校

$\left\{ \begin{array}{l} \text{物理} \\ \text{数II, III} \end{array} \right.$

Newtonの三法則

I 慣性の法則

II 質量 m × 加速度 = 力

フックの法則 $F = -kx$

$x = x(t)$ 時間の関数

$$x'' = -kx$$

$x'' = -ax$ の一般解は

$$x = c_1 \sin at + c_2 \cos at$$

$$= \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\, \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin at + \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\, \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos at$$

$$= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cdot \sin(at + \square)$$

の形

合成関数の微分

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のとき

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f(x)$$

No. 3

Date . .

多変数のとき
$z = f(x, y)$

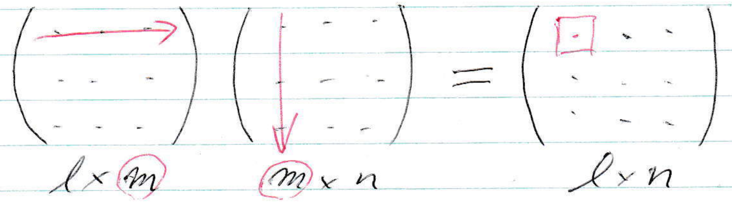
$x = x(u, v)$　　たとえば $x = r\cos\theta$
$y = y(u, v)$　　　　$y = r\sin\theta$ と変数変換する場合

$z = f(x(u,v),\ y(u,v))$
fは u, v の関数

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}}$$

どう受け止めてよいか…

◎ 行列のかけ算



$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$　線型
$g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$　〃　⟶　合成関数 $g \circ f$ は 行列のかけ算に対応

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
線型写像の合成と見る

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$
$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$f'(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の線型写像
$g'(f(x)): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$　〃

行列で書くと……

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_l \end{pmatrix}$$ とする。 $g_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ m変数

$g_i(y_1 \cdots\cdots y_m)$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_l}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_l}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_l}{\partial y_m} \end{pmatrix} \quad l \times m$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$ $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ n変数

$f_i(x_1, \cdots, x_n)$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad m \times n$$

No. 5

Date

例

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 　　 $f(x, y)$ とする.

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$x = x(u, v)$

$y = y(u, v)$

$$u, v \longmapsto \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}}_{1\times 2 \text{ 行列}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}}_{2\times 2 \text{ 行列}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

かけ算

1×2 行列

問題 : $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^2$ とする.

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$ と変換する.

$\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta}$ を計算せよ.