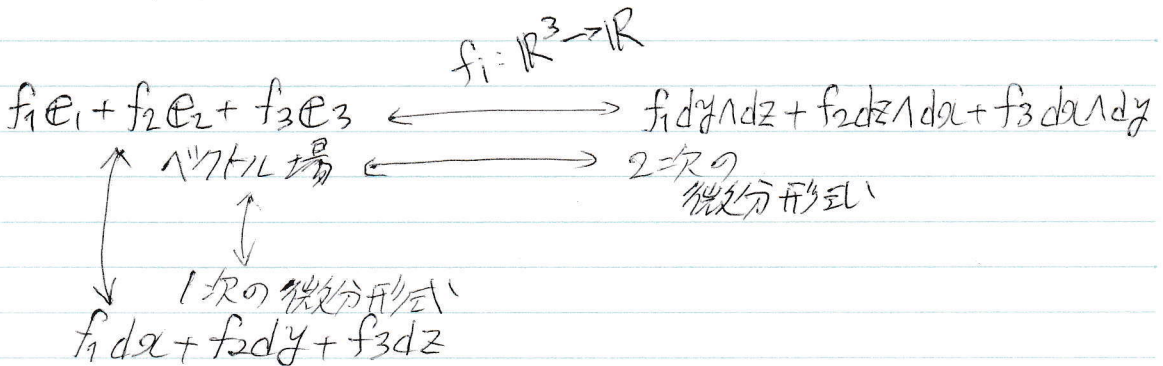
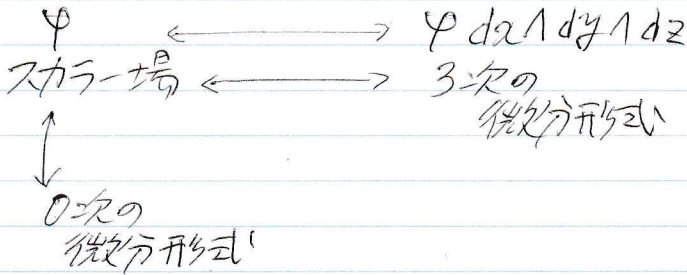


## 微積分演習 秋9回目

微分形式

ベクトル解析 [ $\mathbb{R}^3$ に特化]

複素関数論

 $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  (線型空間として)
$$\begin{array}{cc}
 x + iy \\
 \text{実部} & \text{虚部}
 \end{array}$$

$$dy \wedge dz : \left( \begin{array}{c} |x_1| \\ |x_2| \\ |x_3| \end{array} \begin{array}{c} |y_1| \\ |y_2| \\ |y_3| \end{array} \right) \mapsto \begin{array}{c} |x_2 \ y_2| \\ |x_3 \ y_3| \end{array}$$

 $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  線型写像は 1次の交代形式2次の交代形式 とは  $\chi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  $\chi(x, y)$  は 二重線型かつ交代

$\varphi, \psi$ : 1次の交代形式とする。

$(\varphi \wedge \psi)(x, y) = \varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(x)$  と定義する。

**report I**  $\varphi \wedge \psi$  が 2次の交代形式であること  
を示せ。

$$(1) (\varphi \wedge \psi)(x_1 + x_2, y) = (\varphi \wedge \psi)(x_1, y) + (\varphi \wedge \psi)(x_2, y)$$

$y$ のほうも同様

$$(2) (\varphi \wedge \psi)(\alpha x, y) = \alpha(\varphi \wedge \psi)(x, y)$$

$y$ のほうも同様

二重線型については(1), (2)を示せばよい。

$\varphi, \psi$ : 1次の交代形式がある。  
 $\varphi \wedge \psi$ : 2次の交代形式とする。

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

これに代入すると

$$\begin{aligned} (d\varphi \wedge d\psi)(x, y) &= d\varphi(x)d\psi(y) - d\varphi(y)d\psi(x) \\ &= x_2 y_3 - y_2 x_3 \\ &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

**report II**

$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \psi$ : 1次の交代形式とする

$$(1) \varphi \wedge \psi = -\psi \wedge \varphi$$

$$(2) (\varphi_1 + \varphi_2) \wedge \psi = \varphi_1 \wedge \psi + \varphi_2 \wedge \psi$$

$$(3) (\alpha \varphi) \wedge \psi = \alpha(\varphi \wedge \psi) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

(1) ~ (3) を示せ。

$\varphi, \psi, \chi$  : 1次の交代形式とする

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi \wedge \chi)(x, y, z) &= \varphi(x)\psi(y)\chi(z) + \varphi(y)\psi(z)\chi(x) \\ &\quad + \varphi(z)\psi(x)\chi(y) - \varphi(x)\psi(z)\chi(y) \\ &\quad - \varphi(z)\psi(y)\chi(x) - \varphi(y)\psi(x)\chi(z) \end{aligned}$$

と定義する。

**report III**  $\varphi \wedge \psi \wedge \chi$  が 3次の交代形式であることを示せ。

- $(\varphi \wedge \psi \wedge \chi)(x_1 + x_2, y, z) = (\varphi \wedge \psi \wedge \chi)(x_1, y, z) + (\varphi \wedge \psi \wedge \chi)(x_2, y, z)$
- $(\varphi \wedge \psi \wedge \chi)(\alpha x, y, z) = \alpha(\varphi \wedge \psi \wedge \chi)(x, y, z)$

それぞれ  $\lambda$  の代りに  $\alpha$  について調べる。

**report IV**

- (1)  $(\varphi_1 + \varphi_2) \wedge \psi \wedge \chi = \varphi_1 \wedge \psi \wedge \chi + \varphi_2 \wedge \psi \wedge \chi$
- (2)  $(\alpha \varphi) \wedge \psi \wedge \chi = \alpha(\varphi \wedge \psi \wedge \chi)$
- (3)  $\psi \wedge \varphi \wedge \chi = -\varphi \wedge \psi \wedge \chi$

(1) ~ (3) を示せ。

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  (実数体上の線型空間として)

$\mathbb{R}^3$  上で 4 次の交代形式を考える

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\varphi(x, y, z, w)$  4重線型, 交代

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \quad \text{と表せる。}$$

$y, z, w$  も同様に表す

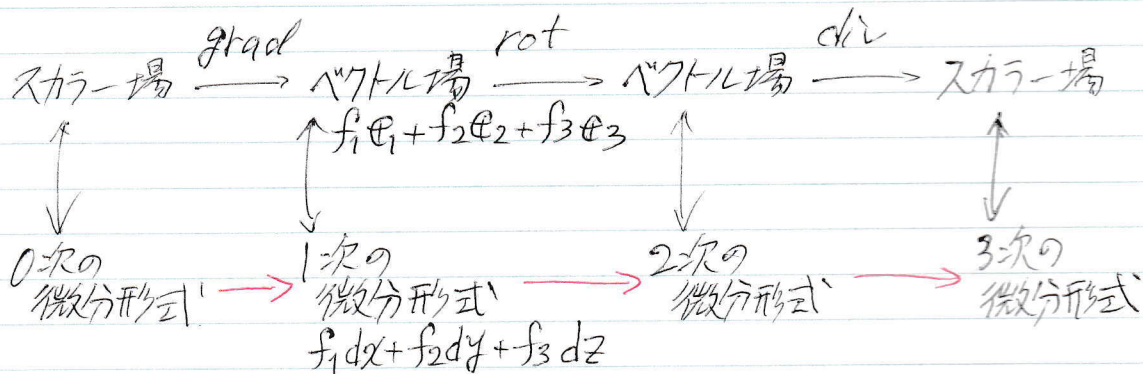
$$\varphi(x, y, z, w) = \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3, \dots, \dots)$$

$$= x_1 y_1 z_1 w_1 \varphi(e_1, e_1, e_1, e_1) + \dots$$

同じものがあつたら 0  
しかし今  $e_1, e_2, e_3$  の3通りしかないので  
全て消える。

$$= 0$$

$\mathbb{R}^3$  上で 4 次交代形式は 0  
 $\mathbb{R}^2$  上で 3 次交代形式は 0



0次微分形式の微分は,

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

grad は,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} e_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} e_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} e_3$$

対応がわかる。

ベクトル場

$$f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$$

↓

1次の

微分形式

$$f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$$

↓ d(微分)

$$d(f_1) \wedge dx + d(f_2) \wedge dy + d(f_3) \wedge dz$$

$$\left( \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \dots$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \underbrace{dy \wedge dx}_{-dx \wedge dy} + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \wedge dx + \dots$$

report V

1次の微分形式の微分が rot に対応していることを示せ。

$$g_1 dy \wedge dz + g_2 dz \wedge dx + g_3 dx \wedge dy$$

の形に整理する。