微積分演習　秋9回目

微分形式

ベクトル解析 [$\mathbb{R}^3$に特化]

φ ⟷ $\varphi\, dx \wedge dy \wedge dz$

スカラー場 ⟷ 3次の微分形式

↕

0次の微分形式

$f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$ ⟷ $f_1 dy\wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$

ベクトル場 ⟷ 2次の微分形式

↕

1次の微分形式

$f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$

複素関数論

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ (線型空間として)

$x + iy$

実部　虚部

$$dy \wedge dz : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 線型写像は 1次の交代形式

2次の交代形式とは $\chi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\chi(x, y)$ が 二重線型かつ交代

φ, ψ : 1次の交代形式とする。

$(\varphi \wedge \psi)(x, y) = \varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(x)$ と定義する.

$\boxed{\text{report I}}$ $\varphi \wedge \psi$ が 2次の交代形式であることを示せ。

(1) $(\varphi \wedge \psi)(x_1 + x_2, y) = (\varphi \wedge \psi)(x_1, y) + (\varphi \wedge \psi)(x_2, y)$
y のほうも同様

(2) $(\varphi \wedge \psi)(\alpha x, y) = \alpha(\varphi \wedge \psi)(x, y)$
y のほうも同様

二重線型については(1), (2) を示せばよい.

φ, ψ : 1次の交代形式があれば
$\varphi \wedge \psi$: 2次の交代形式となる.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

これにならうと,

$$
\begin{aligned}
(dy \wedge dz)(x, y) &= dy(x)dz(y) - dy(y)dz(x) \\
&= x_2 y_3 - y_2 x_3 \\
&= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{report II}}$

$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \psi$: 1次の交代形式とする

(1) $\varphi \wedge \psi = -\psi \wedge \varphi$
(2) $(\varphi_1 + \varphi_2) \wedge \psi = \varphi_1 \wedge \psi + \varphi_2 \wedge \psi$
(3) $(\alpha\varphi) \wedge \psi = \alpha(\varphi \wedge \psi)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

(1)〜(3) を示せ.

φ, ψ, χ : 1次の交代形式とする.

$$(\varphi\wedge\psi\wedge\chi)(x, y, z) = \varphi(x)\psi(y)\chi(z) + \varphi(y)\psi(z)\chi(x) + \varphi(z)\psi(x)\chi(y) - \varphi(x)\psi(z)\chi(y) - \varphi(z)\psi(y)\chi(x) - \varphi(y)\psi(x)\chi(z)$$

と定義する.

$\boxed{\text{report III}}$ $\varphi\wedge\psi\wedge\chi$ が 3次の交代形式であることを示せ.

- $(\varphi\wedge\psi\wedge\chi)(x_1+x_2, y, z) = (\varphi\wedge\psi\wedge\chi)(x_1, y, z) + (\varphi\wedge\psi\wedge\chi)(x_2, y, z)$
- $(\varphi\wedge\psi\wedge\chi)(\alpha x, y, z) = \alpha(\varphi\wedge\psi\wedge\chi)(x, y, z)$

それから入れかえについて調べる.

$\boxed{\text{report IV}}$

(1) $(\varphi_1+\varphi_2)\wedge\psi\wedge\chi = \varphi_1\wedge\psi\wedge\chi + \varphi_2\wedge\psi\wedge\chi$

(2) $(\alpha\varphi)\wedge\psi\wedge\chi = \alpha(\varphi\wedge\psi\wedge\chi)$

(3) $\psi\wedge\varphi\wedge\chi = -\varphi\wedge\psi\wedge\chi$

(1)〜(3) を示せ

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ (実数体上の線型空間として)

$\mathbb{R}^3$上で4次の交代形式を考える

$$\varphi : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\varphi(x, y, z, w)$ 4重線型, 交代

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$ と表せる.

Date

y, z, w も同様に表す

$\varphi(x, y, z, w)$

$= \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,\ y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3,\ ——,\ ——)$

$= x_1 y_1 z_1 w_1 \varphi(e_1, e_1, e_1, e_1) + \cdots\cdots$

同じものがあったら0

しかし今 e_1, e_2, e_3 の3通りしかないので全て消える.

$= 0$

$\mathbb{R}^3$ 上で 4次交代形式は 0

$\mathbb{R}^2$ 上で 3次交代形式は 0

$$
\begin{tikzcd}
\text{スカラー場} \arrow[r, "grad"] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{ベクトル場 } f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3 \arrow[r, "rot"] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{ベクトル場} \arrow[r, "div"] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{スカラー場} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{0次の微分形式} \arrow[r] & \text{1次の微分形式 } f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz \arrow[r] & \text{2次の微分形式} \arrow[r] & \text{3次の微分形式}
\end{tikzcd}
$$

0次の微分形式の微分は,

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

grad は,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} e_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} e_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} e_3$$

対応がわかる.

ベクトル場

$$f_1 \mathbf{e}_1 + f_2 \mathbf{e}_2 + f_3 \mathbf{e}_3$$

$$\updownarrow$$

1次の微分形式　$f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$

$$\downarrow \ d\ (微分)$$

$$d(f_1) \wedge dx + d(f_2) \wedge dy + d(f_3) \wedge dz$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \underbrace{dy \wedge dx}_{-dx \wedge dy} + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz \wedge dx + \cdots\cdots$$

$\boxed{\text{report V}}$

1次の微分形式の微分が rot に対応していることを示せ.

$$g_1\, dy \wedge dz + g_2\, dz \wedge dx + g_3\, dx \wedge dy$$

の形に整理する。