微積分演習　秋8回目

勾配 gradient

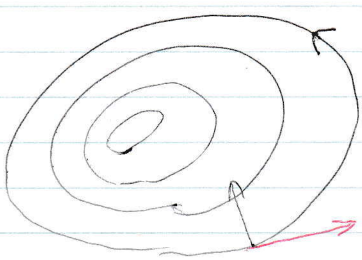
(回転
発散)

φ: スカラー場とする

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x) \end{pmatrix}$$

簡単のため 2次元(平面)で考える
(たとえば 地図上の点に標高……m と対応させる)

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x) \end{pmatrix}$$



等高線

同じ標高に沿って動いてみる

$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$　曲線(等高線)

$t \longmapsto \varphi(\gamma(t))$ は定値関数

微分は 0.

$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ とおける。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\gamma(t))\,\gamma_1'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\gamma(t))\,\gamma_2'(t)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\gamma(t)) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = 0$$

内積

速度ベクトル

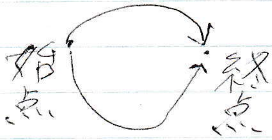
gradient は直交する方向.

等高線に沿って〜の仮定を外してみて、
動く場合、単位時間当たり単位長さ動いて、変化が
1番大きいのは直交する向きに動いたときである。

急傾斜

ベクトル場（力の場）

線積分　　一般に、始点と終点が同じでも、道が
ちがうと線積分の値はかわる。
値が始点と終点だけで決まるとき、
保存力という



万有引力、クーロンの法則は保存力である

φ：スカラー場とする

grad φ（ベクトル場）は保存力である。

証明）$r : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ：曲線

$$\underbrace{\int_r (\mathrm{grad}\,\varphi)\cdot dr}_{\text{線積分}} = \int_a^b (\mathrm{grad}\,\varphi)(r(t))\cdot r'(t)\,dt$$

$$(\mathrm{grad}\,\varphi)(r(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(r(t)) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(r(t)) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}(r(t)) \end{pmatrix}, \quad r'(t) = \begin{pmatrix} r_1'(t) \\ r_2'(t) \\ r_3'(t) \end{pmatrix}$$

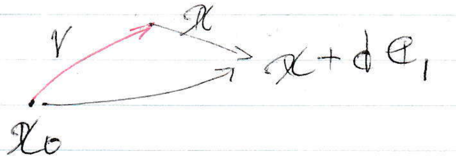
$t \longmapsto \varphi(r(t))$
が原始関数　$= \varphi(r(b)) - \varphi(r(a))$

終点　始点　//

Date

逆に、ベクトル場 $\mathbf{f}$ が保存力 $\Longrightarrow (\exists \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$
$(\mathbf{f} = \mathrm{grad}\,\varphi)$

証明）空間の中に $\mathbf{x}_0$ 固定.



$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_\gamma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

線積分

今、保存力なので
道 γ にはよらない
スカラー場は定まった

$\mathrm{grad}\,\varphi = \mathbf{f}$ を示せばよい

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\mathbf{x})$ を計算する

$d \in D$ として
$$d\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}+d\mathbf{e}_1) - \varphi(\mathbf{x})$$
$$= \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{e}_1$$
$$= f_1(\mathbf{x})\,d$$

また、
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x})$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(\mathbf{x}) = f_3(\mathbf{x})$$

たしかに $\mathrm{grad}\,\varphi = \mathbf{f}$ //

ベクトル場 $\mathbf{f}$ が保存力かどうか知りたいとする.
もし、保存力なら
$$\mathbf{f} = \mathrm{grad}\,\varphi$$
$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi) = 0$ だから、$\mathrm{rot}\,\mathbf{f} = 0$

必要条件

では、$\mathrm{rot}\,\mathbf{f} = 0$ なら保存力だろうか？

閉曲線に沿って動いたら
　　0 となることをいえばよい

定理：閉曲線を境界とするような曲面がある

証明：針金で閉曲線をつくり、石鹸水につけて膜をはる。

回転定理によって、線積分は rot の面積分で出せるから、0 となる //

f 保存力 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rot}\, f = 0$