微積分演習　秋7回目

Gaussの発散定理

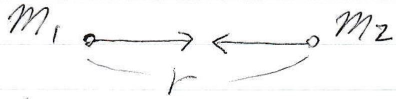
f：ベクトル場
Σ：閉曲面
Ω：Σで囲まれた領域

$$\underbrace{\int_\Sigma f \cdot dS}_{\text{面積分}} = \underbrace{\int_\Omega (\operatorname{div} f)\, dV}_{\text{体積分}}$$

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

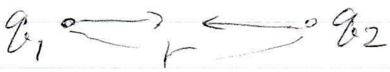
静電気学
クーロンの法則

万有引力の法則



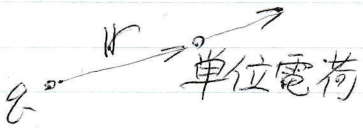
力の大きさ　$G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

クーロンの法則
電荷



$k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$

今、原点に電荷qを置く
$\mathbf{r}$に単位電荷を置いて受ける力を考える



$$\frac{kq}{|\mathbf{r}|^2}\underbrace{\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}}_{\text{単位ベクトル}} = \frac{kq}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$$ の力を受ける

$\mathbf{r} = (x, y, z)$とすると、$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$= (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$

ベクトル場 f は、 $kq\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$ となる。

$\operatorname{div} f$ を計算する。

$$f_1(x,y,z) = kq\,x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = kq\left\{(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + x\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}2x\right\}$$

$$= kq\,(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(x^2+y^2+z^2-3x^2)$$

$$= kq\,(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(-2x^2+y^2+z^2)$$

同様に $\frac{\partial f_2}{\partial y}$, $\frac{\partial f_3}{\partial z}$ も計算すると、

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = kq\,(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(x^2-2y^2+z^2)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = kq\,(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(x^2+y^2-2z^2)$$

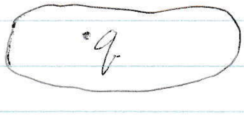
よって発散は 0 となる。

report I

$f = kq\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}(x^2+y^2+z^2)^n$ [nは実数] とする

発散を計算して、消えるのは $n=-\frac{3}{2}$ のときだけだと確認せよ。

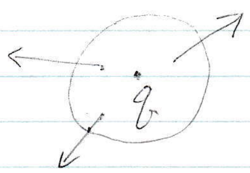
閉曲面 Σ



$$\int_\Sigma f\cdot dS = \int_\Omega (\mathrm{div}\, f)\,dV$$

面積分はいつでも0となるのか…？

半径 a の球面

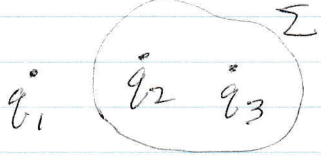


電場 $$\frac{kq}{a^2}\cdot 4\pi a^2 = 4\pi kq \neq 0$$

電荷 q の上では、ベクトル場が定義されていない。

特異点。

Gauss の法則



いくつかの電荷によって電場 f が生じる。

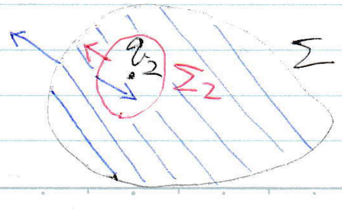
重ね合わせの原理

$$f = \underbrace{f_1}_{q_1\text{だけによって生じる電場}} + \underbrace{f_2}_{q_2\text{だけ}} + \underbrace{f_3}_{q_3\text{だけ}}$$

$$\int_\Sigma f\cdot dS = \underbrace{\int_\Sigma f_1\cdot dS}_{=0} + \int_\Sigma f_2\cdot dS + \int_\Sigma f_3\cdot dS$$

内部にある電荷は隔離

q_2 を中心、半径の小さい球面 Σ_2



$\Sigma \cup \Sigma_2$ 連合軍 を考える

囲まれた内部に特異点はない

$$\int_{\Sigma \cup \Sigma_2} \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\int_{\Sigma} \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{S} - \int_{\Sigma_2} \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{S} = 0$$

よって、

$$\int_{\Sigma} \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Sigma_2} \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{S} = 4\pi k q_2$$

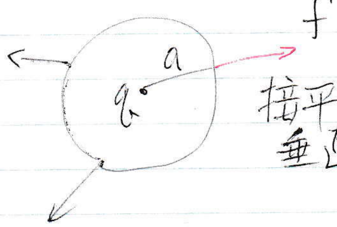
$\mathbf{f}_3$ についても同様にして、

$$\int_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 0 + 4\pi k q_2 + 4\pi k q_3$$
$$= 4\pi k (q_2 + q_3)$$

内部の電荷の足し合わせ

クーロンの法則 $\Longrightarrow$ Gaussの法則

真空に電荷 q



接平面に垂直な向き

$$f \, 4\pi a^2 = 4\pi k q$$
$$f = \frac{kq}{a^2}$$

∇（ナブラ）について

ナブラ
$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

作用素を並べる
ベクトルのようなもの
（擬似ベクトル）

ベクトル場 $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$

スカラー場 φ とする

$\mathrm{rot}\, f$, $\mathrm{div}\, f$, $\mathrm{grad}\, \varphi$ は以下のように表せる

回転
$\mathrm{rot}\, f$

$$\nabla \times f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & f_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & f_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & f_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & f_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & f_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & f_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

ベクトル積

発散
$\mathrm{div}\, f$

$$\nabla \cdot f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

内積

勾配
$\mathrm{grad}\, \varphi$

$$\nabla \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

スカラー倍

Date

report II

(1) スカラー場 φ とする.
$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\varphi) = ?$$

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ とする.
$$\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}) = ?$$

計算せよ.

(注) 偏微分は順序によらない.