No. 1

Date '17. 11. 9

微積分演習　秋 6 回目

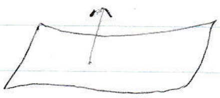
積分定理

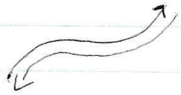
$$\text{スカラー場} \xrightarrow{\text{grad}} \text{ベクトル場} \xrightarrow{\text{rot}} \text{ベクトル場} \xrightarrow{\text{div}} \text{スカラー場}$$

スカラー場	ベクトル場	ベクトル場	スカラー場
↕	↕	↕	↕
0次の微分形式	1次の微分形式	2次の微分形式	3次の微分形式

線積分……曲線…parameter 表示し 向きを与える

面積分……曲面…表裏を決める





回転定理

f: ベクトル場

Σ: 曲面

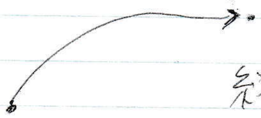
$$\int_{\partial\Sigma} f \cdot dr = \int_{\Sigma} (\mathrm{rot}\, f) \cdot dS$$

$\partial\Sigma$: 境界曲線　　線積分　　面積分

（曲面の表に旗を立てて左手に見える向き）

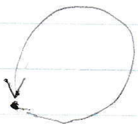
閉曲線とは

$r : [a, b] \longrightarrow R^3$



$r(b)$ 終点

$r(a)$ 始点



$r(a) = r(b)$ となるとき 閉曲線 という

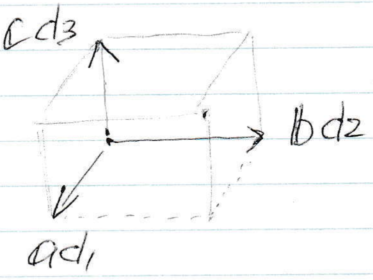
発散定理

f: ベクトル場
Σ: 閉曲面
（内と外と分ける、出入りできない
球面のようなもの
向きは外側を表にする）
Ω: Σで囲まれた領域

$$\int_\Sigma f\cdot dS = \int_\Omega (\mathrm{div}\, f)\, dV$$

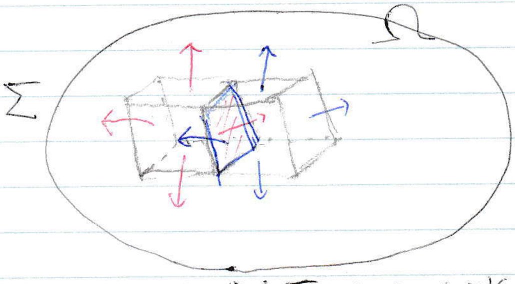
面積分　　体積分

成り立つようにdivを決めたい
回転定理の場合、無限小で成り立つように決めればよかった。
今回も、無限小で成立 $\Longrightarrow$ 一般に成立



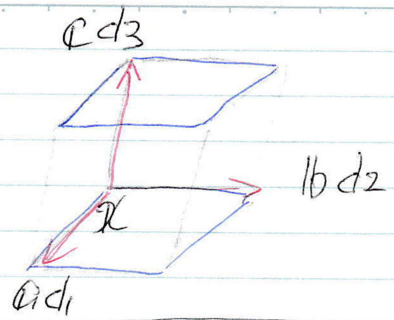
$d_1, d_2, d_3 \in D$
図のような小さい平行六面体（閉曲面）で成り立つとする。

閉曲面Σで覆われる領域Ωを小さい平行六面体で分ける



$$\int_\Omega (\mathrm{div}\, f)\, dV$$
$$= \sum_i \int_{\Omega_i} (\mathrm{div}\, f)\, dV$$
$$= \sum_i \int_{\partial\Sigma_i} f\cdot dS$$

となり合う面は打ち消し合う
かど部屋だけ残る



上面と下面

$$f(x+\mathbb{c}d_3)\cdot(\mathbb{a}d_1\times\mathbb{b}d_2)-f(x)\cdot(\mathbb{a}d_1\times\mathbb{b}d_2)$$
$$=\{f(x+\mathbb{c}d_3)-f(x)\}\cdot(\mathbb{a}d_1\times\mathbb{b}d_2)$$
$$=f'(x)(\mathbb{c})\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b})\,d_1d_2d_3$$

手前と奥の面

$$f(x+\mathbb{a}d_1)\cdot(\mathbb{b}d_2\times\mathbb{c}d_3)-f(x)\cdot(\mathbb{b}d_2\times\mathbb{c}d_3)$$
$$=f'(x)(\mathbb{a})\cdot(\mathbb{b}\times\mathbb{c})\,d_1d_2d_3$$

左右の面

$$f(x+\mathbb{b}d_2)\cdot(\mathbb{c}d_3\times\mathbb{a}d_1)-f(x)\cdot(\mathbb{c}d_3\times\mathbb{a}d_1)$$
$$=f'(x)(\mathbb{b})\cdot(\mathbb{c}\times\mathbb{a})\,d_1d_2d_3$$

ここで $\varphi(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})=f'(x)(\mathbb{c})\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b})+f'(x)(\mathbb{a})\cdot(\mathbb{b}\times\mathbb{c})+f'(x)(\mathbb{b})\cdot(\mathbb{c}\times\mathbb{a})$ とおく.

report I

φが三重線型かつ交代であることを示せ
つまり. 3次の交代形式である.

3次の交代形式全体は1次元の線型空間.

$$\varphi(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})=\alpha V(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})$$

αを決定するには, $\mathbb{a}=\mathbb{e}_1$, $\mathbb{b}=\mathbb{e}_2$, $\mathbb{c}=\mathbb{e}_3$ とおけばよい

report Ⅱ

$\mathbb{a} = \mathbb{e}_1$, $\mathbb{b} = \mathbb{e}_2$, $\mathbb{c} = \mathbb{e}_3$ として、α をもとめよ

$$\mathbb{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \mathbb{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \end{array}$$

$\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x) + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x) + \dfrac{\partial f_3}{\partial z}(x)$ となるはず…

例：

ベクトル場 $\mathbb{F} : (x, y, z) \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

発散 div を計算する。

$\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x) + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x) + \dfrac{\partial f_3}{\partial z}(x)$ を適用する。

$f_1(x, y, z) = x$

$f_2(x, y, z) = y$

$f_3(x, y, z) = z$ なので、$1 + 1 + 1 = 3$（定数）

原点中心の、半径 a の球面の面積分は

体積分の方で計算すると、

$$3 \times \underbrace{\frac{4\pi a^3}{3}}_{\text{体積}} = 4\pi a^3$$ となる。

一辺 1 の立方体の面積分は

$$3 \times \underbrace{1}_{\text{体積}} = 3$$ となる。

今後の予定

複素関数論 ⟶ 実数の世界の積分計算にも御利益がある！