微積分演習　秋5回目

ベクトル解析
- 積分定理
  - grad
  - rot
  - div

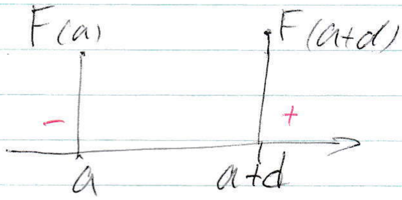
微積分学の基本定理

$F' = f$ のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

無限小の区間 $[a, a+d]$ $(d \in D)$ で
成り立つように決めた。

$$\int_a^{a+d} f(x)\,dx = f(a)\,d = \underbrace{F(a+d) - F(a)}_{\text{母関数}}$$



端点を境界と見る。　母関数を端点で積分。
boundary　　　　　（値を代入）

境界での積分と考える。

$\boxed{\text{ベクトル}}$ f ⟷ $\boxed{\text{1次の交代形式}}$ $a \longmapsto f\cdot a$, $a \in \mathbb{R}^3$, $f\cdot a \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{2次の交代形式}}$ $(a, b) \longmapsto f\cdot(a\times b)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$, $f\cdot(a\times b) \in \mathbb{R}$

ベクトル場 ⟷ 1次の微分形式
ベクトル場 ⟷ 2次の微分形式

回転定理

1次の微分形式 ω $\xrightarrow{\text{微分}}$ 2次の微分形式 $d\omega$

曲面 Σ　　積分定理が成り立つように決めたい

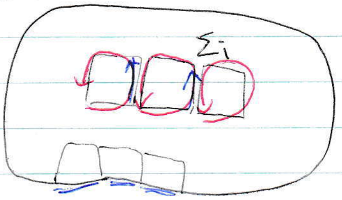
$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega$$

ベクトル場 $\boldsymbol{f}$
境界に沿って線積分

$$\int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\Sigma} (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f})\cdot d\boldsymbol{S}$$

面積分

曲面 Σ　　無限小、では成り立つとする

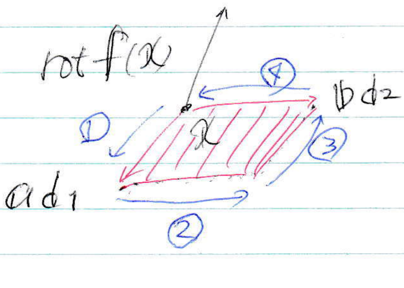


へりだけ残る

$$\int_{\Sigma} (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f})\cdot d\boldsymbol{S}$$
$$= \sum_i \int_{\Sigma_i} (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f})\cdot d\boldsymbol{S}$$

全体のへりが残る

無限小の面積分



$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$
$d_1, d_2 \in D$

面積分
$(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{f})(x)\cdot(\boldsymbol{a}d_1 \times \boldsymbol{b}d_2)$

線積分は

$$\underset{①}{\boldsymbol{f}(x)\cdot \boldsymbol{a}d_1} + \underset{②}{\boldsymbol{f}(x+\boldsymbol{a}d_1)\cdot \boldsymbol{b}d_2} - \underset{③}{\boldsymbol{f}(x+\boldsymbol{b}d_2)\boldsymbol{a}d_1} - \underset{④}{\boldsymbol{f}(x)\cdot \boldsymbol{b}d_2}$$

$$= \{\boldsymbol{f}(x+\boldsymbol{a}d_1) - \boldsymbol{f}(x)\}\cdot \boldsymbol{b}d_2 - \{\boldsymbol{f}(x+\boldsymbol{b}d_2) - \boldsymbol{f}(x)\}\cdot \boldsymbol{a}d_1$$

$$= (\boldsymbol{f}'(x)(\boldsymbol{a})\cdot \boldsymbol{b})\, d_1 d_2 - (\boldsymbol{f}'(x)(\boldsymbol{b})\cdot \boldsymbol{a})\, d_1 d_2$$

関数 $\varphi : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \longmapsto f'(x)(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} - f'(x)(\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}$ とする

$\quad\quad \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \in \mathbb{R}$

$\varphi(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = \varphi(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) + \varphi(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b})$ が成り立つ

なぜなら，(左辺) $= f'(x)(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{b} - f'(x)(\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)$

$$= \{ f'(x)(\boldsymbol{a}_1) + f'(x)(\boldsymbol{a}_2) \} \cdot \boldsymbol{b} - f'(x)(\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)$$

$= \cdots\cdots$

$\varphi(\alpha \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha \varphi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ も成り立つ

report I

> φ が二重線型であることを各々計算して確かめよ.

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を入れかえると，

$$\varphi(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = f'(x)(\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} - f'(x)(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = -\varphi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

よって交代。

φ は2次の交代形式である

よって φ は $\underbrace{\boxed{?}}_{\text{ベクトル}} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ の形をしている.

たとえば $\boxed{?}$ の x 成分は，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_3$ とすれば出る。

report II

$\boxed{?}$ を求めよ.

report II のヒント

たとえば

$f'(x)(e_2)\cdot e_3$ の計算のしかた.

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ベクトル場

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix} \qquad f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

とかける.

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x)\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x)\,dz$$

$$dx : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto x, \quad dy : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto y, \quad dz : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto z$$

であるから

$$f'(x)(e_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x) \\ \frac{\partial f_3}{\partial y}(x) \end{pmatrix}$$

よって.

$$f'(x)(e_2)\cdot e_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x) \\ \frac{\partial f_3}{\partial y}(x) \end{pmatrix} \cdot e_3 = \frac{\partial f_3}{\partial y}(x)$$