No. 1

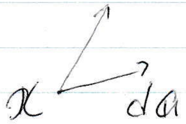
Date '17 . 10 . 26

微積分演習　秋4回目

ベクトル解析
空間 $\mathbb{R}^3$

ベクトル場 ＜ 力の場 / 流れの場 ｝数学的表現としては
どちらもベクトル場 ［古典的］

近代科学では計測できるものを対象にする
力の場では　aだけ動いたとき どれだけ仕事をされるか測る
aでは大きすぎるので da を測る



$$\mathbb{f}(x) \cdot ad = (\mathbb{f}(x) \cdot a)\, d$$

内積

写像　$\underset{\underset{\mathbb{R}}{\cap}}{a} \longmapsto \mathbb{f}(x) \cdot a$　を考える
これは線型写像である

逆に 線型写像 $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ があったとき

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$ とすると.

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \varphi(a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \\ &= a_1 \underbrace{\varphi(e_1)}_{=\alpha_1} + a_2 \underbrace{\varphi(e_2)}_{=\alpha_2} + a_3 \underbrace{\varphi(e_3)}_{=\alpha_3}\end{aligned}$$ とおく

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \mathbb{f}(x)$$

$\mathbb{f}(x) \cdot a$ の計算で
$a = e_1$ とすると第1成分が出る.

$$dx : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longmapsto a_1$$

$$dy : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longmapsto a_2$$

$$dz : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longmapsto a_3$$

1次の交代形式という

$\mathbb{R}^3$ は 3次元

$a_1 \mathbb{e}_1 + a_2 \mathbb{e}_2 + a_3 \mathbb{e}_3$

基底

$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ 線型写像

全体は 3次元

$\boxed{\text{ベクトル}}$ $a_1 \mathbb{e}_1 + a_2 \mathbb{e}_2 + a_3 \mathbb{e}_3$

$\updownarrow$ 対応

$\boxed{\text{1次の交代形式}}$ $a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz$

ベクトル場 $f_1(x, y, z)\mathbb{e}_1 + f_2(x, y, z)\mathbb{e}_2 + f_3(x, y, z)\mathbb{e}_3$

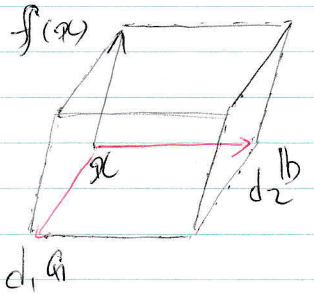
$(f_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R})$

$\updownarrow$ 対応

1次の微分形式 $f_1(x, y, z)dx + f_2(x, y, z)dy + f_3(x, y, z)dz$

空間の各点に1次の交代形式を対応させるものを1次の微分形式という。

流れの場の場合



升を作る

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ で張られる平行四辺形を考える.

大きすぎるので $d_1\mathbf{a}$, $d_2\mathbf{b}$ を考える

$(d_1, d_2 \in D)$

単位時間に横切った水の量

つまり平行六面体の体積をはかる。

$$f(x)\cdot(d_1\mathbf{a} \times d_2\mathbf{b}) = (f(x)\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}))\,d_1 d_2$$

写像 $\underset{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}{\underset{\cap}{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}} \longmapsto f(x)\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ を考える。

これは二重線型である.

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の入れかえで

符号が逆になる.

交代という.

二重線型かつ交代となっている写像を

2次の交代形式という

$\mathbf{a} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_2$ とすると. $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ なので

$f(x)\cdot(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)$ で $f(x)$ の z成分が出る.

同様に $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_3$ とすれば x成分.

$\mathbf{a} = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_2$ とすれば y成分が出る

よって写像から元の f を再発見できる.

$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ 2次の交代形式とする

$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$
$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$ として.

$$\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \varphi(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3)$$

二重線型

$$= a_1b_1\underbrace{\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}_{0} + a_1b_2\boxed{\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} + a_1b_3\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$$

交代性

$$+ a_2b_1\boxed{\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)} + a_2b_2\underbrace{\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)}_{0} + a_2b_3\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

$$+ a_3b_1\varphi(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) + a_3b_2\varphi(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) + a_3b_3\underbrace{\varphi(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3)}_{0}$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + (a_2b_3 - a_3b_2)\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + (a_3b_1 - a_1b_3)\varphi(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ \varphi(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) \\ \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

くさび形積

$dy \wedge dz : (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \longmapsto \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

全体で1つの記号

$dz \wedge dx : (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \longmapsto \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$

$dx \wedge dy : (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \longmapsto \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

これらは
2次の交代形式

2次の交代形式全体も線型空間である.
$dy\wedge dz$, $dz\wedge dx$, $dx\wedge dy$ の線型和で書ける.

$\boxed{\text{ベクトル}}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\boxed{\text{2次の交代形式}}$

$$a_1\mathbb{e}_1+a_2\mathbb{e}_2+a_3\mathbb{e}_3 \longleftrightarrow \begin{aligned}&a_1\,dy\wedge dz\\ &+a_2\,dz\wedge dx\\ &+a_3\,dx\wedge dy\end{aligned}$$

$$\updownarrow$$

$\boxed{\text{1次の交代形式}}$

$$a_1dx+a_2dy+a_3dz$$

ベクトル場 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 2次の微分形式

$$\begin{aligned}&f_1(x,y,z)\,\mathbb{e}_1\\ &+f_2(x,y,z)\,\mathbb{e}_2\\ &+f_3(x,y,z)\,\mathbb{e}_3\end{aligned} \longleftrightarrow \begin{aligned}&f_1(x,y,z)\,dy\wedge dz\\ &+f_2(x,y,z)\,dz\wedge dx\\ &+f_3(x,y,z)\,dx\wedge dy\end{aligned}$$

$$\updownarrow$$

1次の微分形式

$$\begin{aligned}&f_1(x,y,z)\,dx\\ &+f_2(x,y,z)\,dy\\ &+f_3(x,y,z)\,dz\end{aligned}$$

[力の場は 1次の微分形式
流れの場は 2次の微分形式]

3次の交代形式全体は1次元になる.

report

$$\varphi:\underset{\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}{(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})}\longmapsto\underset{\in\mathbb{R}}{\varphi(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})}$$

三重線型かつ交代とする(このようなとき、3次の交代形式という)
$V(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})$ は3次の交代形式である.
任意の3次の交代形式 φ は $\alpha V(\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c})$ となることを示せ.