微積分演習 秋3回目

ベクトル解析（3次元，$\mathbb{R}^3$）

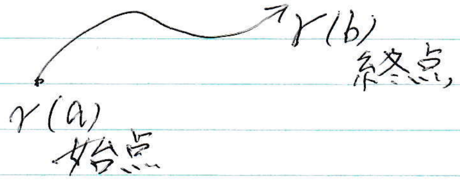
$$\begin{cases} \text{ベクトル場} & \mathbf{f}(x, y, z) \\ \text{スカラー場} & \end{cases}$$

多次元の積分

線積分

曲線 $r : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \in$ 閉区間



曲線 r に沿った線積分は

$\int_r \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ と書く

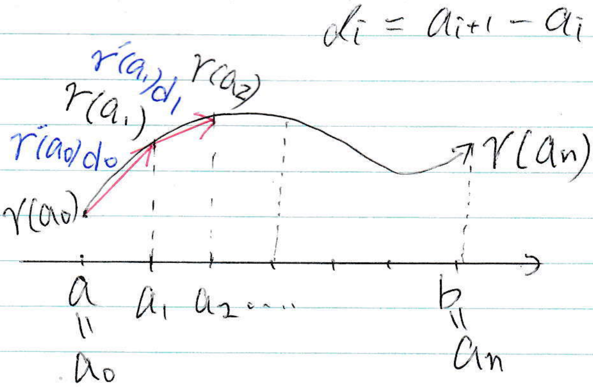
内積

ベクトル場を力の場と考える

曲線に沿って動いたときにされる仕事のことである

$[a, b]$ を細分する。

$d_i = a_{i+1} - a_i \in D$

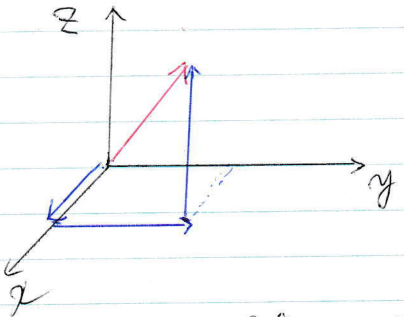


$$\text{仕事} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{f}(r(a_i)) \cdot r(a_i) d_i$$

$$= \int_a^b \mathbf{f}(r(t)) \cdot r'(t)\, dt$$

report I

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \\ xyz \end{pmatrix}$$ とする



①のパラメータ表示.

$t \in [0, 1] \longmapsto (t, t, t)$

$(0, 0, 0)$ から $(1, 1, 1)$ へ向かうとき.
2通りの経路で. 線積分を計算せよ.

① $(0, 0, 0) \longrightarrow (1, 1, 1)$

② $(0, 0, 0) \to (1, 0, 0) \to (1, 1, 0) \longrightarrow (1, 1, 1)$

report II

ベクトル場 $\mathbb{r} : (x, y, z) \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする.

曲線 $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ に沿って線積分を計算せよ.

パラメータは. $\theta \in [0, 2\pi] \longmapsto \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$

面積分

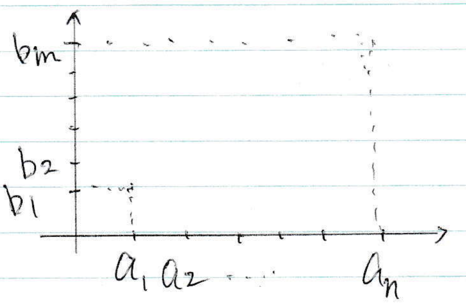
ベクトル場 f : 水の流れの場とする

曲面 $\Sigma : [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

(s, t)

面積分は $\iint_\Sigma f \cdot dS$ と書く

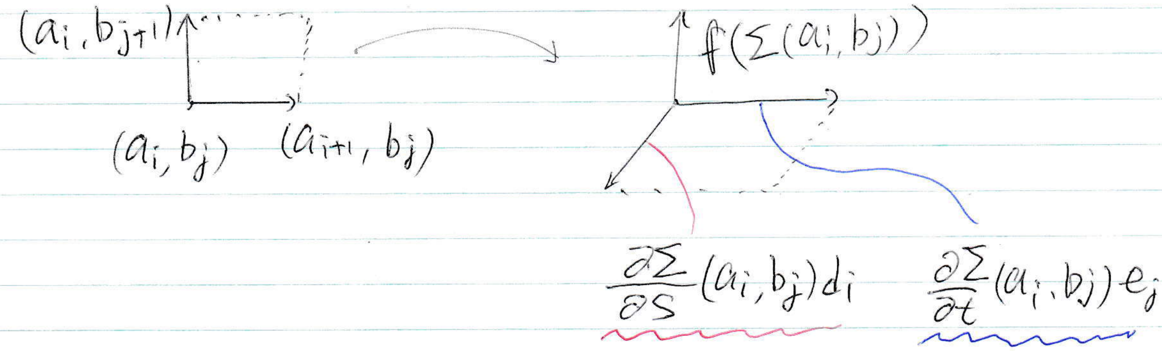
面を横切って単位時間に流れ出す水の量



細分する

$D \ni d_i = a_{i+1} - a_i$

$D \ni e_j = b_{j+1} - b_j$



横切った水の量を求めたい。

平行六面体の体積なので、

$$f(\Sigma(a_i, b_j)) \cdot \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial s}(a_i, b_j) d_i \times \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(a_i, b_j) e_j \right)$$

全体は $\displaystyle\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n-1} f(\Sigma(a_i, b_j))\cdot\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial s}(a_i, b_j)d_i \times \frac{\partial\Sigma}{\partial t}(a_i, b_j)e_j\right)$

$$= \int_{b_1}^{b_2}\left\{\int_{a_1}^{a_2} f(\Sigma(s,t))\cdot\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial s}(s,t)\times\frac{\partial\Sigma}{\partial t}(s,t)\right)ds\right\}dt$$

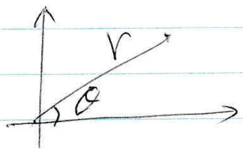
二重積分.

---

report Ⅲ　球の表面積を求めよ.

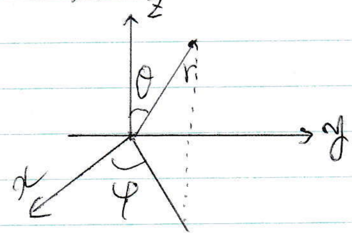
極座標

2次元



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

3次元



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$r \geq 0,\quad 0 \leq \theta \leq \pi$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

原点中心
半径 a の球面 Σ : $(\theta, \varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} a\sin\theta\cos\varphi \\ a\sin\theta\sin\varphi \\ a\cos\theta \end{pmatrix}$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left|\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta}(\theta,\varphi)\times\frac{\partial\Sigma}{\partial\varphi}(\theta,\varphi)\right|d\theta\right)d\varphi = 4\pi a^2$$

となることを
計算して確かめる。

report IV

ベクトル場 $\mathbb{r} : (x, y, z) \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする.

球面に関して面積分を計算せよ

※ベクトル積の定義

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$