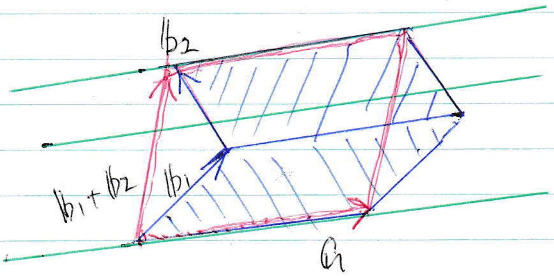
No. 1

Date '17. 10. 12

微積分演習 秋2回目

Cavalieri の原理

$$S(\mathbb{a}, \mathbb{b}_1+\mathbb{b}_2) = S(\mathbb{a}, \mathbb{b}_1) + S(\mathbb{a}, \mathbb{b}_2)$$



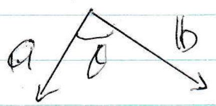
赤と青の面積を比べる。
平行な直線で切る

切り口に線分 $\mathbb{a}$ が現れる
(現れる場所がちがうだけ)

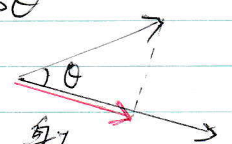
3次元のときも同様
今度は平面で切る。
断面には平行四辺形が現れる
(現れる場所がちがうだけ)

スカラー積 (内積)
ベクトル積 (外積)

- 内積 幾何学的定義



$$\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = |\mathbb{a}|\,|\mathbb{b}| \cos\theta$$



解析的定義

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$ (計算できる)

幾何学的定義 ⟶ 解析的定義 を導く

性質　$(\alpha\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$

$(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}$

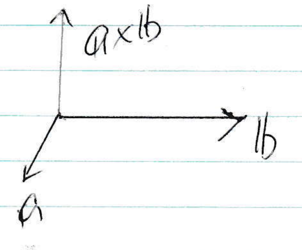
$$\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_i = 1$$
$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = 0 \quad (i\neq j)$$

これらを使って

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3)\cdot(b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+b_3\mathbf{e}_3)\\ &= a_1b_1\,\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 + a_1b_2\,\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2+\cdots\cdots\\ &= a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.\end{aligned}$$

・外積　幾何学的定義



$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ はベクトルである。

大きさは $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が張る平行四辺形の面積。

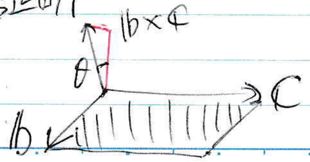
向きは $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{b}$ が右手系となる向き。

解析的定義を導く

公式

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{空間のベクトル } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ に対して}\\ V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\end{array}}$$

証明　平行六面体の体積を考える



$|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}\times\mathbf{c}|\cos\theta$　高さ

底面積（ていめんせき）

$= \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

性質 (1) $\mathbb{a} \times \mathbb{b} = -\mathbb{b} \times \mathbb{a}$

とくに、$\mathbb{a} \times \mathbb{a} = -\mathbb{a} \times \mathbb{a}$

$$2\,\mathbb{a} \times \mathbb{a} = 0$$

$$\mathbb{a} \times \mathbb{a} = 0$$

(2) $(\alpha \mathbb{a}) \times \mathbb{b} = \alpha(\mathbb{a} \times \mathbb{b})$

(3) $(\mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2) \times \mathbb{b} = \mathbb{a}_1 \times \mathbb{b} + \mathbb{a}_2 \times \mathbb{b}$

(3)の証明

任意に $\mathbb{c}$ をとり、内積をとる.

$$\big((\mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2) \times \mathbb{b}\big) \cdot \mathbb{c} \overset{?}{=} \underline{(\mathbb{a}_1 \times \mathbb{b}) \cdot \mathbb{c}} + \underline{(\mathbb{a}_2 \times \mathbb{b}) \cdot \mathbb{c}}$$

$$\| $$

$$V(\mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2, \mathbb{b}, \mathbb{c})$$

$$\| $$

$$\underline{V(\mathbb{a}_1, \mathbb{b}, \mathbb{c})} + \underline{V(\mathbb{a}_2, \mathbb{b}, \mathbb{c})}$$

$x = y$ をいいたい.

任意の $\mathbb{c}$ について

$x \cdot \mathbb{c} = y \cdot \mathbb{c}$ が成り立つ

$(x - y) \cdot \mathbb{c} = 0$

$\mathbb{c} = x - y$ をとる

$$(x - y) \cdot (x - y) = 0$$

$$|x - y|^2 = 0$$

$$|x - y| = 0$$

$$x = y$$

性質 (4) $\mathbb{e}_1 \times \mathbb{e}_2 = \mathbb{e}_3 = -\mathbb{e}_2 \times \mathbb{e}_1$

$\mathbb{e}_2 \times \mathbb{e}_3 = \mathbb{e}_1 = -\mathbb{e}_3 \times \mathbb{e}_2$

$\mathbb{e}_3 \times \mathbb{e}_1 = \mathbb{e}_2 = -\mathbb{e}_1 \times \mathbb{e}_3$

$\mathbb{e}_i \times \mathbb{e}_i = 0$

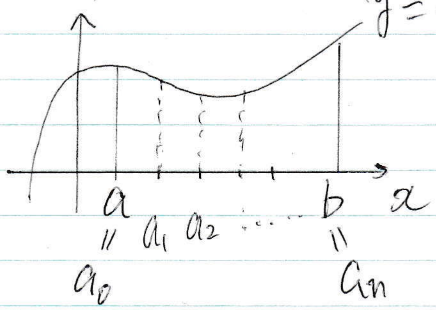
report

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ のとき、$\mathbb{a} \times \mathbb{b}$ を計算する公式を導け

$$\mathbb{a} \times \mathbb{b} = (a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2 + a_3\mathbb{e}_3) \times (b_1\mathbb{e}_1 + b_2\mathbb{e}_2 + b_3\mathbb{e}_3)$$
$$= \cdots\cdots$$

計算する。9個の項のうち 3個消える

定積分

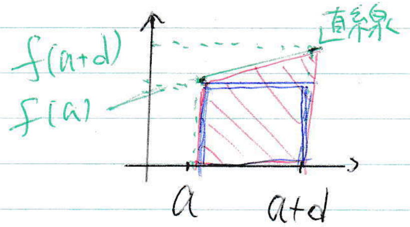


$[a, b]$ を細分する

$s_i = a_{i+1} - a_i \in D$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx$$

区間 $[a, a+d]$ $(d \in D)$ で $\underbrace{\int_a^{a+d} f(x)\,dx}$ を考える



台形の面積

$$\| $$

$$\frac{1}{2}\left(f(a) + f(a+d)\right) \cdot d$$

上底　下底　高さ

$$= \frac{1}{2}\left(f(a) + f(a) + f'(a)d\right) d$$
$$= \frac{1}{2}\left(2 \cdot f(a)\right) d$$
$$= f(a) \cdot d$$

長方形の面積

微積分学の基本定理

$F' = f$ のとき、

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^{a+d} f(x)\,dx = F(a+d) - F(a)$$

$f(a)d$

$\shortparallel$

$F'(a)d$

小さい区間で微積分学の基本定理が成り立つような微分の定義になっている。

全体では、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx$$

$$\int_{a_0}^{a_1} f(x)\,dx = \cancel{F(a_1)} \boxed{-F(a_0)}$$

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx = \cancel{F(a_2)} - \cancel{F(a_1)}$$

$$\vdots$$

$$+)\ \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx = \boxed{F(a_n)} - \cancel{F(a_{n-1})}$$

$$F(b) - F(a)$$

種