No. 1

Date '18 2 8

微積分演習 秋13回目

積分

2/20(火)まで
自然B棟2階レポートBOX

report Ⅰ

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$$ を計算せよ．

偶関数なので $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$ を計算する．

report Ⅱ

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \quad (a>0)$$ を計算せよ．

偶関数なので $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ を計算する．

（$\frac{\pi}{4a^3}$ となる。）

Ⅱの説明

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+a^2)^2}$$ とする．

分母＝0 となるのは $z=\pm ai$ のときで，重解となっている。注意が必要．

$$f(z)=\frac{1}{(z-ai)^2(z+ai)^2}$$

線積分

F：解析関数

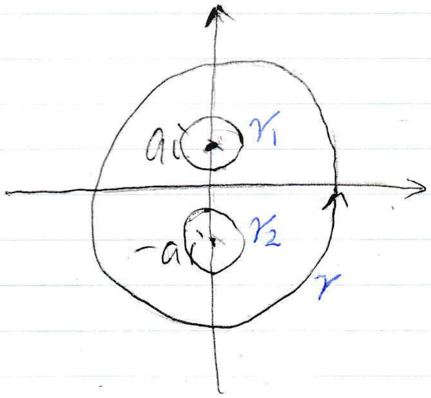
$F'=f$，$\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ のとき．

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b))-F(\gamma(a))$$

γ：閉路なら 0．

z^n (n:整数, $n \neq -1$) の原始関数は $\dfrac{1}{n+1} z^{n+1}$

$(z-\alpha)^n$ (n:整数, $n \neq -1$) の原始関数は $\dfrac{1}{n+1}(z-\alpha)^{n+1}$



道のとり方は各自考えること

$$f(z) = \frac{1}{(z-ai)^2(z+ai)^2}$$

$$g(z) = \frac{1}{(z+ai)^2}$$ とする

$\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{(z-ai)^2}dz$ を計算するには次のように考えられる。

$g(z) = \alpha_0 + \alpha_1(z-ai) + \alpha_2(z-ai)^2 + \cdots\cdots$ と書ける。

$$\frac{g(z)}{(z-ai)^2} = \frac{\alpha_0}{(z-ai)^2} + \frac{\alpha_1}{z-ai} + \alpha_2 + \alpha_3(z-ai) + \alpha_4(z-ai)^2 + \cdots\cdots$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{(z-ai)^2}dz = \underbrace{\int_{\gamma_1} \frac{\alpha_0}{(z-ai)^2}dz}_{=0} + \int_{\gamma_1} \frac{\alpha_1}{z-ai}dz + \underbrace{\int_{\gamma_1} \alpha_2 dz}_{=0} + \underbrace{\int_{\gamma_1} \alpha_3(z-ai)dz}_{=0} + \cdots\cdots$$

$$= \alpha_1 \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-ai}$$

α_1 は, $g'(z) = \alpha_1 + 2\alpha_2(z-ai) + 3\alpha_3(z-ai)^2 + \cdots\cdots$ なので
$\alpha_1 = g'(ai)$ で求まる。

次に、三角関数を含んだ積分の例を見る。

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} \quad (a>1)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}$$

$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とする

$\frac{1}{z} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

よって、$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$

$\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz$ より、$d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}$$

$\gamma : [0, 2\pi] \to e^{i\theta}$
単位円

$$= \int_\gamma \frac{1}{a+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz}$$

$$= \int_\gamma \frac{1}{a+\frac{1}{2z}(z^2+1)} \frac{dz}{iz}$$

$$= \int_\gamma \frac{2z}{2az+z^2+1} \frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{2}{i}\int_\gamma \frac{dz}{z^2+2az+1}$$

ここで、$z^2+2az+1=0$ となるのは、

$z = -a \pm \sqrt{a^2-1}$ のとき。

$\alpha = -a + \sqrt{a^2 - 1}$
$\beta = -a - \sqrt{a^2 - 1}$ とする。

βは単位円の外なので、積分にあたって、αについて考えればよい。

report Ⅲ

$$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} \quad (a>1) \quad \text{を計算せよ.}}$$