Date '18. 2. 1

微積分演習 秋12回目

Cauchyの積分公式

report I

$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ とする。
原点中心、半径2の円 γ とする。
$\int_\gamma f(z)\,dz$ を計算せよ

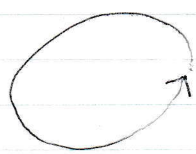
やり方はこれから説明する。

そのあと $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$ の計算のやり方を説明する

実数の世界の積分が複素数を考えることで、簡単にできる。

($\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ になる)

解析関数は、閉路に沿って
線積分すると 0 になる。



今、$f(z)$ は $1+z^4=0$ となる点では定義されていない。
$z^2 = \pm i$ となる点は特異点である。
$z^2 = i$ となるとき

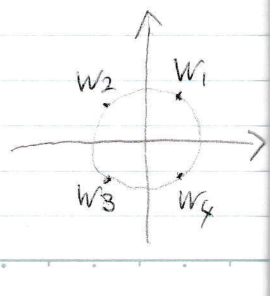
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

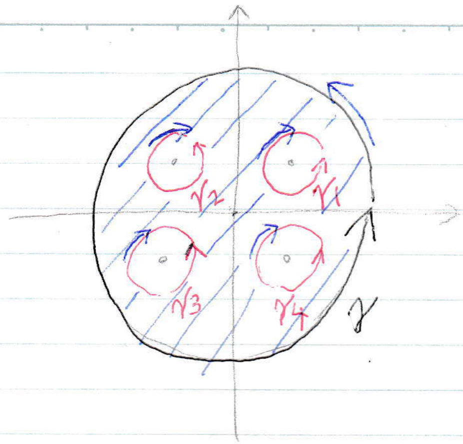
$$2\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$$

$z^2 = -i$ となるとき $\theta = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$



単位円周上に4つ特異点がある。
w_1, w_2, w_3, w_4 とする。



図のように$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$をとり、特異点を隔離する

$\gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$の内部に特異点はない

内部を左手に見る向きなので、$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$のところは、単独のときとは逆向きになる

$$\int_{\gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz - \cdots = 0$$

よって、

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz + \int_{\gamma_4} f(z)\,dz$$

となる。

以下、ここの求め方を説明

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4} = \frac{z^2}{(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)(z-w_4)}$$

$$g_1(z) = \frac{z^2}{(z-w_2)(z-w_3)(z-w_4)}$$

とおくと、

$$f(z) = \frac{g_1(z)}{z-w_1}$$

$g_1(z)$はγ_1の中では解析関数。

$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 2\pi i\, g_1(w_1)$となる。(Cauchyの積分公式)

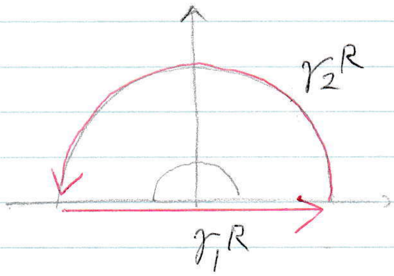
ほかの特異点についても同様にする。

report II

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx \quad \text{を計算せよ.}}$$

やり方はこれから説明する.

$f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$ とする.



半径R（十分大きい）の半円の閉路 γ^R をとる。

線分 γ_1^R, 円周部分 γ_2^R に分ける.

$$\int_{\gamma^R} f(z)\,dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (\text{Rの値によらない})$$

一方, (左辺) $= \underbrace{\int_{\gamma_1^R} f(z)\,dz}_{\text{実数の世界}} + \int_{\gamma_2^R} f(z)\,dz$

$R \to \infty$ とすれば $\to 0$

以下説明する

$$\int_{\gamma_1^R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$$

$R \to \infty$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$$

ここで $|f(x)| < M$ のとき

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le M \underbrace{(b-a)}_{\text{区間の長さ}}$$

が成り立つ。

複素数の線積分でも.

$|f(z)| < M$ のとき

$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \le M\underbrace{X}_{\gamma\text{の長さ}}$ が成り立つ.

今, $\int_{\gamma_2^R} \frac{z^2}{1+z^4} dz$ を考えると,

γ_2^R の長さは πR.

$\left| \frac{z^2}{1+z^4} \right| = \frac{|z^2|}{|1+z^4|} \le \frac{R^2}{R^4-1}$ (三角不等式).

よって

$\left| \int_{\gamma_2^R} f(z)dz \right| \le \frac{\pi R^3}{R^4-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

※ 三角不等式

$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

$(1+z^4) - 1 = z^4$

$|1+z^4| + 1 \ge R^4$