No. 1
Date '18 1 25

微積分演習 秋11回目

微分形式

$$
\begin{tikzcd}
\text{スカラー場} \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d] & \text{ベクトル場} \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d] & \text{ベクトル場} \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d] & \text{スカラー場} \arrow[d] \\
\text{0次の微分形式} \arrow[r, "d"] & \text{1次の微分形式} \arrow[r, "d"] & \text{2次の微分形式} \arrow[r, "d"] & \text{3次の微分形式}
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = 0$

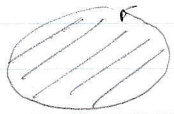
$\mathrm{div} \circ \mathrm{rot} = 0$ 微分形式の方でも $d \circ d = 0$

積分定理

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

1次の微分形式 w, 閉曲線 γ, 囲まれる領域 Ω

$$\int_\gamma w = \int_\Omega dw$$



$dw = 0$ の場合は 0 となる.

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ とする.

$f = f_1 + i f_2$ とわける. $(f_1, f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R})$

$dz = dx + i\,dy$ だった。

$$d(f dz) = d(f_1 + i f_2)(dx + i\,dy)$$

微分形式の微分

$$= d\{f_1 dx - f_2 dy + i(f_2 dx + f_1 dy)\}$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial y} dy \wedge dx - \frac{\partial f_2}{\partial x} dx \wedge dy + i\left(\frac{\partial f_2}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial f_1}{\partial x} dx \wedge dy\right)$$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\right) dy \wedge dx + i\left(-\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\right) dx \wedge dy$$

$=0$ となる条件は.

$$\boxed{\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial x}}$$

Cauchy-Riemann の方程式

前回の話では. $df = g_1 dx + g_2 dy$
$= g(dx + i dy)$
$= g\, dz$

我々は解析関数を扱う.
(正則関数)

$df = f' dz$ と書けるから. $d(f' dz) = 0$

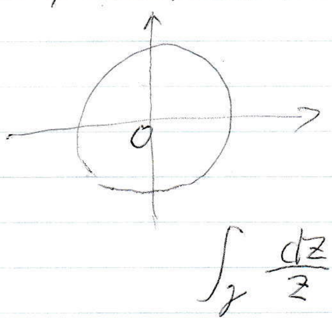
微分係数

よって. f: 解析関数 $\Longrightarrow$ f': 解析関数 となる.
(analytic)

解析関数どうしの和, 差, 積, 商は解析関数であった。

$f(z) = \frac{1}{z}$ を考える。 $z \neq 0$ で定義された解析関数である。

原点中心、半径 a の円 γ に沿って線積分してみよう.



$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\theta \longmapsto a(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a(\cos\theta + i\sin\theta)} \frac{dz}{d\theta} d\theta$$

$$\frac{dz}{d\theta} = a(-\sin\theta + i\cos\theta)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{a(-\sin\theta + i\cos\theta)}{a(\cos\theta + i\sin\theta)} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} i \, d\theta$$

$$= 2\pi i$$

ところで $\int_\gamma f dz = \int_\Omega d(f dz)$ （Ω：γで囲まれる領域）

fが解析関数ならば $d(f dz) = 0$ だから

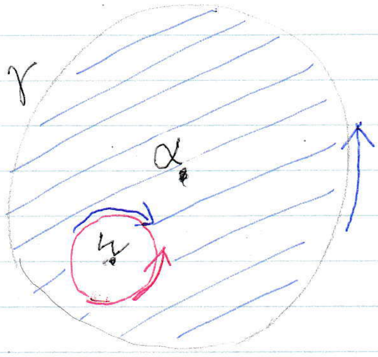
0 となるはずである。

今は、内部に定義されていない点があるので、$2\pi i$ となっている。中心が α の場合の $f(z) = \frac{1}{z-\alpha}$ でも同様である。

$\mathbb{C} \ni \alpha$ を中心とする半径 a の円 γ を考える。

f：解析関数とする。

$$\int_\gamma f dz = 0$$



円の内部に w をとり、

$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz$ を考える

$g(z) = \frac{f(z)}{z-w}$ を考えている。

これは w のところが特異点となっている。

wを中心とする半径r（十分小さい）の円 γ_r を描く

$$\int_{\gamma \cup \gamma_r} \frac{f(z)}{z-w} dz = 0$$

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-w}\,dz$$

となる。

$r \to 0$ とすると、$f(z) \to f(w)$

右辺は、$\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-w}dz = f(w)\int_{\gamma_r}\frac{dz}{z-w}$

$\qquad\qquad = 2\pi i \cdot f(w)$

よって、$\displaystyle f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz$ である。

$$\frac{f(z)}{z-w} = \frac{f(z)}{(z-\alpha)-(w-\alpha)}$$

$$= \frac{f(z)}{\left(1-\frac{w-\alpha}{z-\alpha}\right)(z-\alpha)}$$

z：円周を動くとき

$a = |z-\alpha| > |w-\alpha|$

$$= \left\{1+\frac{w-\alpha}{z-\alpha}+\left(\frac{w-\alpha}{z-\alpha}\right)^2+\cdots\right\}\frac{f(z)}{z-\alpha}$$

$\left|\dfrac{w-\alpha}{z-\alpha}\right| < 1$

等比級数の公式が使える

$$= f(z)\left\{\frac{1}{z-\alpha}+\frac{w-\alpha}{(z-\alpha)^2}+\frac{(w-\alpha)^2}{(z-\alpha)^3}+\cdots\right\}$$

だから、

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\alpha}dz + \int_\gamma \frac{f(z)(w-\alpha)}{(z-\alpha)^2}dz + \int_\gamma \frac{f(z)(w-\alpha)^2}{(z-\alpha)^3}dz + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-\alpha} + (w-\alpha)\underbrace{\boxed{\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-\alpha)^2}}}_{\beta_1} + (w-\alpha)^2\underbrace{\boxed{\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-\alpha)^3}}}_{\beta_2} + \cdots\right\}$$

$w-\alpha$ の無限次の多項式の形に書けている。