No. 1

Date '18 1 18

微積分演習　秋10回目

微分形式

複素関数論

$\mathbb{C}$: 複素数

$a+bi$ （a, b は実数）

$i^2=-1$

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式は、

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\sqrt{\ }$ の中が負になることもあるが、複素数の範囲では必ず解をもつ

実数体上の線型空間として、$\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ である。
（但し、掛け算が入っている）

足し算　$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

掛け算　$(a_1+b_1i)\times(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$

$f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ とする。

$f(x+iy)=f_1(x+iy)+if_2(x+iy)$ と、わける

$f_i:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}$

微分して　$df=\frac{\partial f_1}{\partial x}dx+\frac{\partial f_1}{\partial y}dy+i\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}dx+\frac{\partial f_2}{\partial y}dy\right)$

ちなみに…

高校での微分

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$df=f'dx$

積分　$\int_a^b f(x)\,dx$ は、1次の微分形式を線積分している

$z = x + iy$ に対して
$dz = dx + i\,dy$ と定義する

$df = g\,dz$ と書けるのはどういうときか考える
($g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$)

$$df = \underbrace{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + i\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)}_{= g} dx + \underbrace{\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + i\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)}_{= ig} dy$$

となっているとき.

$$ig = \frac{\partial f_1}{\partial y} + i\frac{\partial f_2}{\partial y}$$
$$g = -i\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

条件は.

$$\boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial y}}$$

である.

これを Cauchy-Riemann の方程式という
(仏) (独)

Cauchy-Riemann の方程式をみたす関数 f を正則関数(解析関数)という。このとき $df = g\,dz$ と書けるわけだが、g を微分係数といい、f' と書く。

複素解析では正則関数を対象にする。

正則関数の例.

例. $f(z) = c$ (定数)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$$

なので Cauchy-Riemann の方程式をみたす。$f' = 0$.

例 $f(z)=z$ （恒等関数）

$f=f_1+if_2$ （実部と虚部に分ける）

$f_1(x+iy)=x$

$f_2(x+iy)=y$

$\dfrac{\partial f_1}{\partial x}=1,\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y}=1,\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y}=0$ なので

Cauchy-Riemann の方程式をみたす． $f'=1$.

report

I $f, g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は正則とする。
このとき，$f+g$ が正則であることを示せ。
また，微分係数は $(f+g)'=f'+g'$ となることを示せ。

II $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は正則とする。α は複素数とする。
このとき αf が正則であることを示せ
また，微分係数は $(\alpha f)'=\alpha f'$ となることを示せ。

III $f, g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は正則とする。
このとき，fg が正則であることを示せ。
また，微分係数は $(fg)'=f'g+fg'$ となることを示せ。

IV $f, g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は正則とする。$g\neq 0$ とする。
このとき，$\dfrac{f}{g}$ が正則であることを示せ。
また，微分係数は $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$ となることを示せ。

したがって
$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots\cdots + a_0$ (多項式)
は正則であり,
$f'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \cdots\cdots + a_1$ である。

数Ⅱと同じように計算できる。

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\cdots$ (無限次の多項式) であった。

$e^{z} = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots\cdots$ と定義。
複素数

$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots\cdots$ であった。

$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots\cdots$ と定義.

$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots\cdots$ であった。

$\cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \cdots\cdots$ と定義。

$$(e^z)' = 0 + 1 + \frac{1}{2!}2z + \frac{1}{3!}3z^2 + \cdots\cdots$$
$$= 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots\cdots$$
$$= e^z$$