No. 1

Date '17. 10. 5

微積分演習　秋1回目

微積分 $\Longleftarrow$ 力学 (17C) Newton

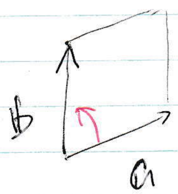
ベクトル解析 $\Longleftarrow$ 電磁気学 (19C)
ファラデー

勾配 grad(ient)
発散 div(ergence)
回転 rot(ation)

線型代数の補足

行列式

平面のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ で張られる平行四辺形の符号のついた面積 $S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ を考える.



$\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ を見て.
反時計回りなら $+$
時計回りなら $-$

性質 ① $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -S(\mathbf{b}, \mathbf{a})$

$\mathbf{a} = \mathbf{b}$ とすれば $S(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = -S(\mathbf{a}, \mathbf{a})$

$$2S(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$$

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$$

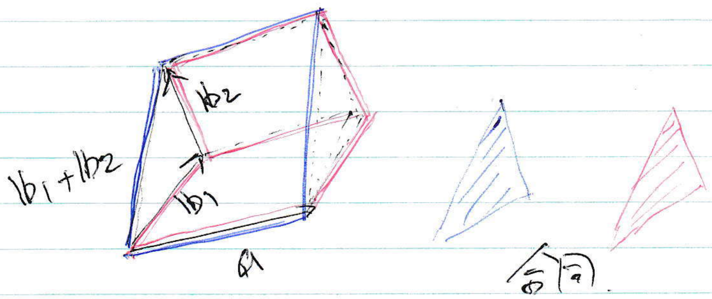
② $S(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

同様に $S(\mathbf{a}, \beta\mathbf{b}) = \beta S(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ $(\beta \in \mathbb{R})$

③ $S(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = S(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) + S(\mathbf{a}_2, \mathbf{b})$

$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = S(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1) + S(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2)$

③の証明



④ $S(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2) = 1$
$S(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_1) = -1$
$S(\mathbb{e}_i, \mathbb{e}_i) = 0$
$\left[但し.\ \mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \mathbb{e}_1 + a_2 \mathbb{e}_2$$

$$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1 \mathbb{e}_1 + b_2 \mathbb{e}_2$$

$$\begin{aligned} S(\mathbb{a}, \mathbb{b}) &= S(a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2,\ b_1\mathbb{e}_1 + b_2\mathbb{e}_2) \quad ②,③ \\ &= a_1 b_1 \underbrace{S(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_1)}_{0} + a_1 b_2 \underbrace{S(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2)}_{1} \\ &\quad + a_2 b_1 \underbrace{S(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_1)}_{-1} + a_2 b_2 \underbrace{S(\mathbb{e}_2, \mathbb{e}_2)}_{0} \\ &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

のようにも書く.

行列式は少し前、高校で教えられていた.

空間のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ で張られる
平行六面体の符号のついた体積 $V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ を考える

$\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ へ、右ねじを回して進む方向に
$\mathbf{c}$ があったら $+$
(右手系)
反対なら $-$
(左手系)

性質

① $V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -V(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c})$
入れかえで符号が変わる

$V(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = 0$
同じものがあれば 0

② $V(\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$

③ $V(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = V(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + V(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
証明はあとで.

④ $V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1$

$$\begin{aligned} V(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) &= -V(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\ &= V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1 \end{aligned}$$

$V(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$

$V(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = -1$
$V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) = -1$
$V(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = -1$

No. 4

Date

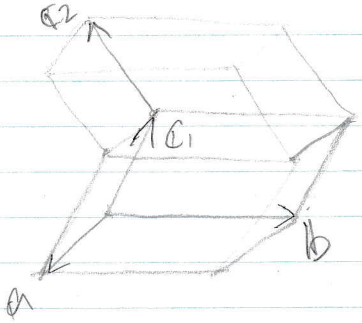
レポートⅠ

$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ のとき.

性質を使って. $V(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c})$ を求めよ.

($\mathbb{a} = a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2 + a_3\mathbb{e}_3$ と置いて計算する)

③の証明



$V(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}_1 + \mathbb{c}_2)$

$= V(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}_1) + V(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}_2)$

↑

左辺と右辺の図形で.
ちがっている部分の体積
が等しいことをいえばよい.
(合同ではない)

レポートⅡ
Cavalieri の原理を使って
証明せよ.

$V(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c})$ を
$|\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}|$, $\det(\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c})$ ともかく.

ベクトル解析 —— 空間に特化

出演 ・スカラー場（空間の各点にスカラーを対応）
・ベクトル場（　〃　ベクトル　〃　）

温度
湿度

力の場、流れの場

数学的には、力の場も流れの場もベクトル場である。
一人二役で、別の役割を演じている