

# 逐次推定・最適化に基づく生命保険負債の動的ヘッジ戦略

穴山裕司・山田雄二

**要旨** 高齢化の進展や低金利の長期化は、生命保険会社の保証リスクを増大させる要因である。ところが、従来からのアセット・ライアビリティ・マネジメント (Asset Liability Management; 以下 ALM) は将来の死亡率や利子率の変動を考慮しない原価主義基準であるため、保険会社にとっては支払額の増加や保有資産価値の棄損に伴う損失を過小評価する可能性がある。そこで近年、資産と負債を市場整合的に評価し、その差額であるサープラス (資本剰余金) の時間的な変動をリスクとして評価する経済価値ベースの ALM に移行しつつあるが、このような経済価値ベースの ALM の下では、サープラスの低下は企業価値の低下を意味する。

本研究では、保険会社が販売する生命保険負債を空売り証券とみなし、その将来キャッシュフローの現在価値によって与えられる負債価値の時間的な変動に対する資産側の動的ヘッジ戦略を、経済価値ベース ALM の枠組みの下で新たに提案すること目的とする。具体的には、負債及び資産の将来キャッシュフローを予測 (あるいは確率モデルを用いたシナリオを生成) した上で、損失を抑制するための最適化問題を定式化し、各期で再推定したモデルパラメータに対して計算される最適投資配分比率を用いてリバランスを行うという、逐次推定と最適化を交互に繰り返す動的ヘッジ戦略を構築する。この際、各期の最適化問題としては、損失に対する条件付バリュー・アット・リスク (Conditional Value at Risk, 以下 CVaR) 最小化問題を解くことで、提案手法におけるサープラスの損失抑制効果を検証する。さらに、日本市場における 1995 年 12 月から 2014 年 12 月の期間の実績データに対して実証分析を実施し、取引コストに対するペナルティを考慮した上でも、累積サープラスによって与えられる損失が抑制されることを示す。

**Keywords** : 保険 ALM, 条件付バリュー・アット・リスク (CVaR), 動的ヘッジ, 取引コスト, 逐次推定・最適化アルゴリズム, Lee-Carter モデル, 一般化加法モデル, 動的 Nelson-Siegel モデル。

## 1. はじめに

生命保険会社は、保険契約者から払い込まれた保険料を資産運用により利殖し、将来の支払い事由発生時に、予め定められた金額の保険金を保険金受取人へ支払う。このように、生命保険商品を販売することは、生命保険会社から見れば将来に返済義務が生じる債券を発行することと同義であり、将来の「保険金」は「負債」と等価であると解釈される。ところが、生命保険においては、負債価値や資産価値は将来の死亡率や利子率によって変動する。また、近年進展している高齢化や低金利の長期化など、負債価値の増加を通じて生命保険会社の保証リスクを増大させる要因も存在している。そのため、生命保険会社にとって、保険金支払額の現在価値を評価し、負債の支払原資となる資産を管理する必要性、すなわち ALM が重要な役割を果たす。以上を背景として、本研究では資産及び負債の将来キャッシュフローを確率モデルとして表現し、そのネットキャッシュフローに関する目的関数を最小化することで、サープラスと呼ばれる資産価値と負債価値の差の変動リスクをコントロールするための最適ヘッジ戦略を構築することを目的とする<sup>1</sup>。

---

<sup>1</sup>本研究で提案するネットキャッシュフローに関する目的関数手法は、負債と資産間におけるキャッシュフローが等しくなるように調整するもので、キャッシュフロー・マッチングとも呼ばれる。他にも、金利感応度のギャップに関する目的関数を最小化するデュレーション・マッチングと呼ばれる手法が存在するが、この手法ではイールドカーブの平行シフト (平行移動) にしか対応できないため、本研究ではキャッシュフロー・

ここでは、定額保険の一種である普通養老保険に対するヘッジ問題を考える。本論文で対象となる保険は、保険契約者集団が定常状態に達したあと、既存加入者による保険契約者集団の推移のみを考えるクローズドモデルであるとの仮定をおく。投資対象となる資産には、国内生命保険会社の主要資産である固定利付国債（以下、利付債）を想定する。このような問題設定においては、負債である保険商品がもたらすキャッシュフロー（支払額）は死亡率によって、資産である利付債がもたらすキャッシュフロー（受取額）は金利によって変動する。生命保険は超長期にわたるキャッシュフローを取り扱うため、初期時点の金利シナリオだけを用いて構築したヘッジポジションを保有し続けると（すなわち静的ヘッジ）、想定した金利シナリオから現実の金利情勢が乖離した場合にサープラスの変動が大きくなり、結果としてリスクの高い運用結果となることが懸念される。そこで本論文では、保険満期までの期間を1年刻みで分割し、各期で将来の金利シナリオの生成と最適ポートフォリオを更新する逐次推定・最適化アルゴリズムを適用することで、サープラスの変動リスクをコントロールする動的ヘッジモデルを新たに提案する。また、各期で適用するポートフォリオ最適化は、負債キャッシュフローに対する資産キャッシュフローの不足額を抑制することを目的に、CVaR 最小化問題を解く。

このような生命保険の ALM に関する CVaR 最小化問題については、Iyengar and Ma (2009) が、負債キャッシュフローと資産キャッシュフローの差額に関する CVaR 最小化問題 (Rockafellar and Uryasev (2000)) を解くことで、投資対象である利付債の最適投資比率を求める手法を提案している。そこでは、負債キャッシュフローには固定シナリオ、資産キャッシュフローには Hull-White モデル (Hull and White (1990)) を適用したりリスク中立シナリオから生成される仮想的なキャッシュフローシナリオを用いて、1 期間モデルにより利付債に対する投資比率を求めている。それに対して、本研究では死亡率に対しては Lee-Carter モデル (Lee and Carter (1992))、金利期間構造に対しては動的 Nelson-Siegel モデル (Nelson and Siegel (1987), Diebold and Li (2006)) をあてはめ、確率モデルを適用することによって将来キャッシュフローシナリオを生成している点が異なる。さらに逐次推定・最適化の考え方を用いて、多期間にわたる動的ヘッジへと問題設定を拡張している点も新規性があるといえる。また、本研究では、このような多期間設定の下で、日本市場における 1995 年 12 月から 2014 年 12 月の期間の実績データを対象に実証分析を実施し、取引コストに対するペナルティを考慮した上でも、累積サープラスによって与えられる損失が抑制されることを実証的に示す。

次節以降の構成は次の通りである。まず第 2 節ではヘッジ対象とする負債キャッシュフローの定義と関連研究について述べる。第 3 節では逐次推定・最適化アルゴリズムを適用した動的ヘッジと ALM 最適化モデルの構築について述べる。第 4 節では将来キャッシュフローのシナリオ構築に必要な死亡率と金利期間構造のモデル化について述べる。第 5 節では、1995 年 12 月から 2014 年 12 月までの期間を対象に、これらモデルを日本市場に適用した場合の分析結果を述べる。最後に第 6 節において全体のまとめを行う。

## 2. 生命保険負債に対する ALM

本節では、本研究で取り扱う生命保険商品の負債キャッシュフローとそのヘッジ戦略について概要を説明し、関連研究である Iyengar and Ma (2009) と本研究との問題設定上の比較を行う。

### 2.1. ヘッジ対象となる保険商品とキャッシュフロー

本研究では、生命保険負債として養老保険の保険金支払いキャッシュフローに焦点を当てる。養老保険とは生死混合保険であり、保険契約期間内に死亡した場合と、満期まで生存していた場合に、それぞれ予め契約で

---

マッチングの手法を採用する。

定めた死亡保険金、若しくは生存保険金が支払われる。なお、通常の保険料計算では、保険契約者の死亡は年央に一括して発生すると仮定して計算するが、本研究では簡単のため将来の保険金支払いは年1回、年末に発生するものとする。このような養老保険において、加入時( $t = 1$ )に $x$ 歳の被保険者に対する $t$ 年先の支払いキャッシュフロー $L_{x,t}$ は、以下のように与えられる。

$$L_{x,t} = 1 \times I_{\{t-1 \leq \tau_x < t\}}, t = 1, \dots, 19 \quad (1)$$

$$L_{x,20} = 1 \times I_{\{20 \leq \tau_x\}} \quad (2)$$

ただし、 $\tau_x$ は被保険者の死亡までの年数、 $I_{\{j\}}$ は括弧内のイベントが起こった際に1、そうでない場合に0をとる指示関数である。指示関数の期待値は当該イベントの発生する確率を与えるので、例えば $E(I_{\{t-1 \leq \tau_x < t\}})$ は、時点 $t-1$ まで生存していた被保険者が1年以内に死亡する確率を表し、実務上は死亡率に対応する。

本研究では、 $x$ 歳の被保険者が $t-1 \leq \tau_x < t$ を満たす $\tau_x$ 年後に死亡する確率を $q_{x,t}$ と表記する。死亡時の支払いキャッシュフローは1であるので、 $q_{x,t}$ は被保険者に対する時点 $t$ の支払いキャッシュフローの期待値(期待キャッシュフロー)に等しい。なお、大数の法則より、保険契約者数が十分に大きければ、同時点、同年齢の被保険者に対する保険会社の支払キャッシュフローは死亡率に比例すること、また、保険会社が保有する保険契約を負債と見なした際の負債キャッシュフローは、年齢ごとの死亡率を保険加入者の年齢分布で加重平均したものに比例することに注意する。さらに、満期時点における負債キャッシュフローは、満期時点までの生存確率を保険加入者の年齢分布で加重平均したものによって与えられる。

以上、本研究で対象とする負債キャッシュフローについて述べたが、通常、保険会社は単年度の負債キャッシュフローを個別に管理するのではなく、過年度の負債キャッシュフローを一括して管理するのが一般的である。そこで本研究では上記で導入した養老保険のみを販売する仮想的な保険会社モデルを想定し、将来の支払保険金である負債キャッシュフローに対する資産側のヘッジ戦略を検討していく。具体的にヘッジ対象とする保険商品は、期間 $n$ 年、保険金1円の養老保険(無配当・解約無し)とし、保険期間内の各年末に1回、保険金の支払いが発生すると仮定する。この保険金の支払いを充足させるため、資産側では満期までの各年末に1回、キャッシュフローの受け取りが発生する固定利付債のポートフォリオを保有するものとする。尚、金利変動により債券の購入価格が変動するため、資産ポートフォリオから得られる将来キャッシュフローは、最終的に金利によって受取額が変動することになる。

## 2.2. 関連研究

Iyengar and Ma (2009) は、負債キャッシュフローと資産キャッシュフローの差額に関する CVaR 最小化問題 (Rockafellar and Uryasev (2000)) を解くことで、投資対象である利付債の最適投資比率を求める手法を提案している。そこでは、金利変動を Hull-White モデル (Hull and White (1990)) によってモデル化し、モンテカルロ・シミュレーションにより将来のイールドカーブのシナリオを生成している。

表 2.1 : 関連研究との比較

	Iyengar and Ma (2009)	本研究
負債モデル	固定シナリオ(1 シナリオ)	Lee-Carter モデル(1 シナリオ)
資産モデル	Hull-White モデル(1000 シナリオ)	動的 Nelson-Siegel モデル(1000 シナリオ)
ヘッジ戦略	静的ヘッジ	動的ヘッジ
目的関数	各将来時点のネット CF の最大不足額の CVaR 最小化	各将来時点のネット CF の最大不足額の CVaR 最小化
対象債券	11 個 (0.5 年債, 1~5 年債 (1 年毎), 10~30 年債 (5 年毎))	20 個 (1~20 年債 (1 年毎))
取引コスト	なし	あり
数値実験期間	1 時点	20 時点

表 2.1 は Iyengar and Ma (2009) と本研究の提案手法を比較したものである。Iyengar and Ma (2009) では負債キャッシュフローには固定シナリオを、資産キャッシュフローにはリスク中立シナリオを適用し、これら仮想的なキャッシュフローシナリオを用いて 1 期間モデルにより利付債に対する投資比率を求めている。それに対して、本研究では実際の死亡率及びビルドカーブデータに対して確率モデルを適用することで将来キャッシュフローシナリオを生成する点が異なる。さらに本研究では、逐次推定・最適化アルゴリズムを適用し、リバランスごとにモデルパラメータを再推定した上で最適投資比率を更新することで、多期間にわたる動的ヘッジ手法を構築している。

このように、本研究の一つの目的は、Iyengar and Ma (2009) において静的ヘッジとして提案された枠組みを、動的なケースへ拡張することである。また本研究では、死亡率に対しても確率モデルをあてはめることで負債キャッシュフローを確率的に評価する点、および資産取引に対する取引コストを導入する点においても、モデルの枠組みの拡張が行われている。

### 3. 動的ヘッジと各期の ALM 最適化問題

本研究で取り扱う養老保険は、数十年にわたる超長期のキャッシュフローを取り扱うため、ヘッジ戦略においても、保険期間中のモデルパラメータの変動を考慮する必要がある。そこで本研究では、以下に導入する逐次推定・最適化アルゴリズムを適用し、各期において保有資産をリバランスする動的 ALM 手法を構築する。

#### 3.1. 逐次推定・最適化アルゴリズム

本研究では、モデル予測制御 (Model Predictive Control; MPC) と呼ばれる、無限期間のホライズンをもつ制御問題を有限期間の問題で近似した上で、各期で有限期間の問題を解いては制御入力を更新するプロセスを繰り返す制御手法を参考に、逐次推定・最適化アルゴリズムを構築する。MPC は、各期において制御対象のモデルを利用してシステムの状態値を予測し制御入力を求める手法で、近年、ファイナンス分野に対しても適用されるようになっている。また、通常の多期間最適化による最適ポートフォリオ問題との違いは、各期で最適化問題を解き直すことで最適ポートフォリオを更新する点である。そのため、新たにデータが観測されるごとにパラメータの再推定を行うことが可能であり、本問題のように、死亡率モデルや金利期間構造モデルの推定

パラメータが、時点に依存して変化する場合に有効であることが期待される。ただし、本論文の生命保険負債に対するヘッジ問題は単一の保険商品を対象としているため、各期の最適化問題における予測ホライズンが時点変化とともに短縮すること、および元の問題設定が有限期間であることが、通常の MPC の問題設定（野波・水野他（2015））と異なる。そのため本論文では、提案手法を（MPC ではなく）逐次推定・最適化アルゴリズムと呼ぶことにする。なお、ファイナンス問題に対して MPC を適用した例としては、Yamada and Primbs (2012) 等が存在する。

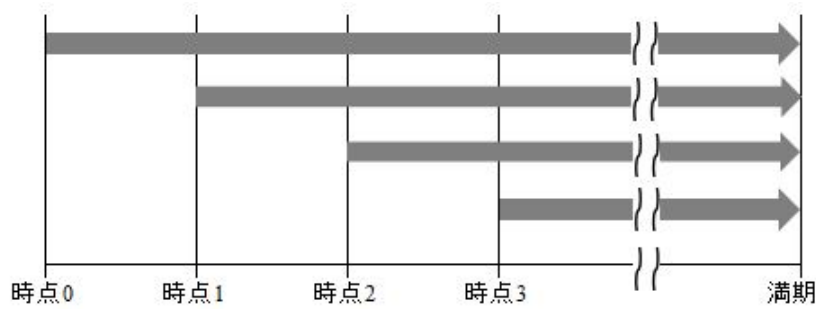


図 3.1：逐次推定・最適化アルゴリズム

図 3.1 は、本論文で適用する逐次推定・最適化アルゴリズムにおける各期の最適化問題と予測期間の関係を表している。このように、本論文で取り扱う養老保険は満期が有限期間に設定されており、また満期までの期間が時間の経過とともに短縮されるため、リバランスの際、前の期で解いた最適化問題より 1 期間少ない問題を解くことに注意する。

以下、本論文で実行する逐次推定・最適化アルゴリズムの具体的な手順を示す。

1. まず、時点 0 で将来のネットキャッシュフローを予測し、満期までの期間の予測ネットキャッシュフローに関する目的関数についての最適化問題を解くことで、全ての投資可能資産（本論文においては満期の異なる国債）に対する投資比率を求める。
2. つぎに、時点 1 において、新たに観測された変数を考慮してパラメータを再推定した上で、1 期間短い満期に対する最適化問題を解き、その時点で投資可能な資産（時点 0 で満期が 1 年のものは除外）に対する投資比率を求めてリバランスを行う。
3. 時点が更新されるごとに、これらの手続きを満期時点の 1 年手前まで繰り返すことで、各期の最適投資比率を求めてリバランスを行う。

### 3.2. 資産・負債キャッシュフローに対する ALM 最適化問題

本論文では、各期で解く ALM 最適化問題について、資産及び負債のキャッシュフロー二乗誤差最小化と、負債キャッシュフローに対する資産キャッシュフローの不足額を CVaR で表現した CVaR 最小化の 2 通りを設定する。ただし、キャッシュフロー二乗誤差最小化については巻末付録に詳細を記載し、本節では Iyengar and Ma (2009) に基づく CVaR 最小化、および余剰資金の先送りを考慮した CVaR 最小化問題について定式化を行う。なお、予測情報に必要な負債キャッシュフローの計算には、死亡率を表現するモデルとして Lee-Carter モデルを仮定し、Lee-Carter モデルにおける対数死亡率の時間的な変化を示す暦年要因パラメータに一般化加法モデルを適用して将来死亡率の予測を行う。資産キャッシュフローの計算には金利期間構造モデルとして動的

Nelson-Siegel モデルを仮定し、動的 Nelson-Siegel モデルの水準・傾き・曲率の時間的変化に多変量自己回帰 (VAR) モデル (あるいは個別変数に対する自己回帰 (AR) モデル) を適用した上で、モンテカルロ・シミュレーションにより将来の金利シナリオを生成する。Nelson-Siegel モデルの水準・傾き・曲率の時間的変化に時系列モデルを適用して金利期間構造の予測を行った論文には Diebold and Li (2006) がある。状態空間表現を用いた動的 Nelson-Siegel モデルについては、藤井・高岡 (2008), Kobayashi (2016) が詳しい。なお、予測情報として更新するパラメータは、変動の大きい金利シナリオのみとし、死亡率については長期にわたり緩やかにトレンドが形成されることから、初期時点の予測シナリオを継続して用いることにする。以下、Iyengar and Ma (2009) に基づく CVaR 最小化、および余剰資金の先送りを考慮した CVaR 最小化問題を定式化する。

### 3.2.1. Iyengar and Ma [2009] に基づく CVaR 最小化

金利期間構造モデルから生成されるシナリオ  $q (= 1, 2, \dots, 1,000)$  における銘柄  $j (= 1, 2, \dots, n)$  の資産キャッシュフローを  $h_{m,q}^{(j)}$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$  と表わす。ただし、 $n$  は時点 0 における保険満期までの残存年数である。また、 $t = 0$  の時点において Lee-Carter モデルにより予測した負債キャッシュフローを  $f_m^{LC}$ 、 $f_m^{LC}$  を第  $n$  要素にもつ負債キャッシュフローベクトルを  $F_m^{LC}$ 、 $x_t^{(j)}$  を  $t$  時点における銘柄  $j$  の投資比率、それら第  $j$  要素にもつ縦ベクトルを  $\mathbf{x}_t$  と表わす。さらに、 $cpn_{t+1|t}^{(j)}$  を  $t$  時点で購入した銘柄  $j$  の  $t+1$  時点における受取利息、 $pl_{t+1|t,q}^{(j)}$  を  $t$  時点で購入した銘柄  $j$  の  $t+1$  時点におけるシミュレーション価格から計算した償還損益とする。利付債の額面を 1 円とすると、 $h_{m,q}^{(j)}$  は以下の行列で表される。

$$\begin{pmatrix} cpn_{t+1|t}^{(1)} + 1 + pl_{t+1|t,q}^{(1)} & cpn_{t+1|t}^{(2)} & \cdots & cpn_{t+1|t}^{(n)} \\ 0 & cpn_{t+2|t}^{(2)} + 1 + pl_{t+2|t,q}^{(2)} & \cdots & cpn_{t+2|t}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & cpn_{t+n|t}^{(n)} + 1 + pl_{t+n|t,q}^{(n)} \end{pmatrix} \quad (3)$$

負債の将来キャッシュフローに対する資産の将来キャッシュフローの不足 (= 将来のネットキャッシュフローの不足) を下方リスクとして考えることから、本研究では損失関数を  $f(x, y) = -(h_m^{(j)} \mathbf{x}_t - F_m^{LC})$  と定義し、確率変数  $h_m^{(j)}$  が連続的な確率密度関数  $p(y)$  に従うと仮定する。この時、損失が  $\alpha$  以下となる確率は、

$$\Psi(x, \alpha) = \int_{f(x,y) \leq \alpha} p(y) dy \quad (4)$$

である。VaR はネットキャッシュフローの不足が  $\alpha$  以下である確率が  $\beta$  以上になるときの最小の  $\alpha$  であるから、

$$VaR_\beta(x) = \min\{\alpha | \Psi(x, \alpha) \geq \beta\} = \alpha_\beta(x) \quad (5)$$

と定義できる。CVaR はネットキャッシュフローの不足が  $\alpha_\beta(x)$  を上回る場合の不足額の期待値であるので、

$$CVaR_\beta(x) = \frac{\int_{f(x,y) \geq \alpha_\beta(x)} f(x, y) p(y) dy}{\int_{f(x,y) \geq \alpha_\beta(x)} p(y) dy} \quad (6)$$

と定義でき、 $\Psi(x, \alpha)$  の  $\alpha$  に関する連続性の仮定から、 $\int_{f(x,y) \geq \alpha_\beta(x)} p(y) dy = 1 - \beta$  となるため、

$$CVaR_{\beta}(x) = \frac{\int_{f(x,y) \geq \alpha_{\beta}(x)} f(x,y)p(y)dy}{1-\beta} = \phi_{\beta}(x) \quad (7)$$

となる。上記の CVaR は積分区間が VaR に依存していることから、直接最適化することは困難である。そこでパラメータ  $\alpha$  を用いて以下の補助関数を定義する。

$$F_{\beta}(x, \alpha) = \alpha + (1-\beta)^{-1} \int_{y \in \mathbb{R}^n} [f(x,y) - \alpha]^+ p(y) dy \quad (8)$$

但し、 $[\alpha]^+ = \max(\alpha, 0)$  である。

次に確率密度関数  $p(y)$  に従う  $k$  個のサンプルパスをモンテカルロ・シミュレーションにより発生させ、補助関数  $F_{\beta}(x, \alpha)$  を近似すると、

$$\hat{F}_{\beta}(x, \alpha) = \alpha + \frac{1}{k(1-\beta)} \sum_{q=1}^k [f(x, y_q) - \alpha]^+ \quad (9)$$

と定義できる。

補助変数  $u_q (q = 1, 2, \dots, k)$  を導入し線形の制約条件を付すことで、リスク指標に CVaR を用いる最適化問題は、以下の線形計画問題として定式化できる。

$$\text{Minimize } \alpha + \frac{1}{k(1-\beta)} \sum_{q=1}^k u_q, \quad q = 1, 2, \dots, k, k = 1000$$

$$\begin{aligned} \text{Subject to } & u_q + h_{m,q}^{(j)} \mathbf{x}_t - F_m^{LC} + \alpha \geq 0, \quad m = 1, 2, \dots, n \\ & \mathbf{x}_t \geq 0, \quad t = 0, 1, \dots, n-1 \\ & u_q \geq 0 \end{aligned}$$

初期時点における投資金額は、時点 0 における将来の予測負債キャッシュフローの現在価値総額とする。

$$\text{ones}(1, n) \mathbf{x}_0 = (1 + \rho)^{-1} F_{t+1}^{LC T} (DF1_0, DF2_0, \dots, DFn_0)^T$$

$\text{ones}(1, n)$  は 1 が横方向に  $n$  個並んだ横ベクトル、 $T$  は転置を表わす。

時点 1 以降については、 $t$  時点で構築した債券ポートフォリオの  $t+1$  時点における時価金額から、 $t+1$  時点で支払った実績負債キャッシュフロー  $f_{t+1}$  を差し引いた投資可能金額の全額を再投資するものとする。

$$\text{ones}(1, n) \mathbf{x}_{t+1} =$$

$$(1 + \rho)^{-1} \left[ (1 + \rho)^{-1} \left( CIF_t^{n \times n} (1, DF1_{t+1}, \dots, DFn-1_{t+1})^T \right)^T \mathbf{x}_t - f_{t+1} + (CIF_t^{n \times 1})^T \mathbf{x}_t \rho \right]$$

ここで、 $CIF_t^{n \times n}$  は  $t$  時点において 1 円で発行された利付債のキャッシュフローを表現した以下の行列であり、

$$\begin{pmatrix} cpn_{t+1|t}^{(1)} + 1 & 0 & \dots & 0 \\ cpn_{t+1|t}^{(2)} & cpn_{t+2|t}^{(2)} + 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cpn_{t+1|t}^{(n)} & cpn_{t+2|t}^{(n)} & \dots & cpn_{t+n|t}^{(n)} + 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$DFn_t$  は  $t$  時点で観測される期間  $n$  年の割引係数（市場ゼロイールド）、 $\rho$  は取引コストである。

### 3.2.2. 余剰資金の先送りを考慮した手法

3.2.1 項で定義したモデルでは、各期のネットキャッシュフローに対する CVaR を最小化する上で、前期の資

産と負債のキャッシュフローの差額から生じる余剰資金は必ずしも考慮されていない。すなわち、発生した余剰資金を次期以降に先送りすることなく、各期で負債キャッシュフロー以上の資産キャッシュフローを CVaR 最小化の意味で確保できるよう債券ポートフォリオの最適化を行う設定であり、リスクを過大評価する可能性がある。図 3.2 は、3 期分のキャッシュフローを例として、債券ポートフォリオから得られる資産キャッシュフローが負債キャッシュフローを上回るケースを示したものである。一方で、図 3.3 は各期の負債キャッシュフローを超過する分を余剰資金として認識することで、各期の負債キャッシュフローと等価の資産キャッシュフローを債券ポートフォリオから確保できるよう最適化を行ったケースを示している。本項では図 3.3 に示すキャッシュフローのように、余剰資金に対する先送りを考慮することで各期における損失を評価した上で、CVaR を最小化する最適ポートフォリオを求めることを考える。

	資産CF		負債CF
1 期目	0.96	>	0.95
2 期目	0.98	>	0.96
3 期目	1.00	>	0.97

図 3.2 : 余剰資金なしの例

	資産CF	余剰資金			資産CF	負債CF
		1期目	2期目	3期目		
1 期目	0.96	-0.01			0.95	= 0.95
2 期目	0.98	-0.01	-0.01		0.96	= 0.96
3 期目	1.00		-0.01	-0.02	0.97	= 0.97

図 3.3 : 余剰資金有りの例

具体的には、以下のように等式制約を修正することで、各期の余剰資金を次期に先送りすることを許す CVaR 最小化問題を定義する。

$$\text{Minimize } \alpha + \frac{1}{k(1-\beta)} \sum_{q=1}^k u_q, \quad q = 1, 2, \dots, k, k = 1000$$

$$\begin{aligned} \text{Subject to } & h_{m,q}^{(j)} x_t - Z_{m-1,q} - Z_{m,q} = F_m^{LC}, \quad m = 1, 2, \dots, n \\ & \alpha + Z_{m,q} + u_q \geq 0, \\ & x_t \geq 0, \quad t = 0, 1, \dots, n-1 \\ & u_q \geq 0 \end{aligned}$$

但し、 $Z_{m,q}$  はシナリオ  $q$  における時点  $m$  のキャッシュフローから生じる余剰資金、 $Z_{m-1,q}$  は前期から先送りされた余剰資金を表す。また、時点 0 では余剰資金は生じないため  $Z_{0,q} = 0$  を満たす。

初期時点における投資金額は、時点 0 における将来の予測負債キャッシュフローの現在価値総額以下とし、

$$\text{ones}(1, n) x_0 \leq (1 + \rho)^{-1} F_{t+1}^{LC T} (DF1_0, DF2_0, \dots, DFn_0)^T$$



時点 1 以降の投資資金についても、前期の余剰資金  $Z_{m-1}$  を用いて以下の線形不等式制約を与える。

$$\mathbf{ones}(1, n)\mathbf{x}_{t+1} \leq$$

$$(1 + \rho)^{-1} \left[ (1 + \rho)^{-1} \left( \mathbf{CIF}_t^{n \times n} (1, DF1_{t+1}, \dots, DFn - 1_{t+1})^T \right)^T \mathbf{x}_t - f_{t+1} + (\mathbf{CIF}_t^{n \times 1})^T \mathbf{x}_t \rho \right] + Z_{m-1}$$

前期の余剰資金  $Z_{m-1}$  は当期に先送りされるため、余剰資金の分だけ当期の投資資金が増え、先送りを考慮しないケースと比較すると、負債キャッシュフローに対する資産キャッシュフローの下振れリスク、すなわち CVaR が減少することが予想される。本論文では 5.3 節において、余剰資金の先送りの効果について検証し、実際に CVaR の値が低下することを検証する。

#### 4. 死亡率と金利期間構造のモデル化

日本市場における提案手法の適用例を示す前に、本研究で利用する負債・資産キャッシュフローのシナリオを予測、生成する死亡率と金利期間構造のモデルについて述べる。

##### 4.1. 死亡率モデル

負債キャッシュフローは保険金額と年齢ごとの死亡率によって特徴付けられるが、保険金額は予め定数として与えられるため、将来の負債キャッシュフローを予測するには、死亡率を予測すればよい。死亡率の予測モデルには、パラメトリックモデルとノンパラメトリックモデルが存在するが、単一の死亡法則に従うパラメトリックモデルは、小暮・長谷川 (2005) が指摘するように、一部年齢において適合度の犠牲を余儀なくされることから、コーホート全体にわたる死亡率を表現することは困難である。そこで本研究ではノンパラメトリックなモデルとして、死亡率予測に広く利用されている Lee-Carter モデル (Lee and Carter (1992)) を使用する。Lee-Carter モデルは  $x$  歳の人の  $t$  時点における対数死亡率を次式で表現するモデルである。

$$\ln(q_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{x,t} \quad (11)$$

ただし、 $\varepsilon_{x,t}$  は残差項である。各パラメータの定性的な解釈は、 $\alpha_x$  (年齢要因) : 年齢  $x$  の平均的な対数死亡率、 $\kappa_t$  (暦年要因) : 対数死亡率の暦年  $t$  による変化、 $\beta_x$  (年齢効果) : 暦年要因に対する年齢ごとの効果、であり、 $x$  歳の人の将来の対数死亡率を予測するには、時間依存するパラメータである  $\kappa_t$  (暦年要因) を予測すればよい。Lee-Carter モデルを使用した将来死亡率の予測については、例えば小暮 (2007) を参照されたい。小暮 (2007) では、暦年要因の推定値  $\hat{\kappa}_t$  に適合する時系列モデルは ARIMA モデルを使用するのが標準的な手続き<sup>2</sup>としているが、本研究では一般化加法モデル (Generalized Additive Model : 以下 GAM) を適用することを考える。

一般化加法モデルでは、暦年要因  $\hat{\kappa}_t$  を被説明変数として残差項である  $\varepsilon_t$  を最小にする平滑化スプライン関数  $f(\cdot)$  を考える。

$$\hat{\kappa}_t = \text{系列変動} + \text{残差変動} = f(x_t) + \varepsilon_t, \text{mean}(\varepsilon_t) = 0, \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 \quad (12)$$

<sup>2</sup> インサンプル期間が短い場合は、ランダムウォークモデルを使用する場合もある。

平滑化スプライン関数は通常の最小二乗法ではなく、残差平方和に平滑化パラメータの項を加えたペナルティ付き残差平方和（PRSS : Penalized Residual Sum of Squares）が最小となる  $f(x)$  として与えられる。

$$\text{PRSS} = \sum_{t=1}^N (\hat{\kappa}_t - f(x_t))^2 + \lambda \int \{f''(x)\}^2 dx \quad (13)$$

但し、 $x_1 < x_2 < \dots < x_N$  である。

上記のペナルティ付き残差平方和は、当然ながら右辺第 1 項の値が小さいほどモデルの当てはまりが良い。第 2 項の  $f''(x)$  は凹凸ペナルティと呼ばれており、 $f(x_t)$  の曲率を表現している。 $\lambda (\geq 0)$  は平滑化パラメータであり、値が大きいほど曲線が滑らかとなる。

アウトオブサンプル期間における暦年要因  $\kappa_t$  を求めるには、(13) 式を最小にすることにより回帰係数を求めたあと、 $x$  に求めたい外挿期間の値を代入すればよい。平滑化スプライン回帰を予測モデルとして用いる場合、平滑化パラメータは予測誤差が小さくなるように求めればよく、その予測誤差を推定する統計量としては、一般化クロスバリデーション（Generalized Cross-Validation : GCV）が代表的である。

#### 4.2. 金利期間構造モデル

養老保険の負債キャッシュフローをヘッジするための資産側の投資対象としては、利付国債を想定する。このような利付国債の将来キャッシュフローは額面に対する投資比率と金利によって特徴づけられるが、本研究では金利変動を表現する期間構造モデルとして Nelson-Siegel モデル（Nelson and Siegel (1987)）を使用する。

Nelson-Siegel モデルは、瞬間フォワードレートを以下の通り指数関数の線形和で表現するモデルであり、満期までの期間が  $m$  年の瞬間フォワードレート  $f(m)$  を

$$f(m) = \beta_1 + \beta_2 e^{-m\lambda} + \beta_3 m\lambda e^{-m\lambda} \quad (14)$$

と表わす。

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$  はそれぞれイールドカーブの水準( $\beta_1$ )、傾き( $\beta_2$ )、曲率( $\beta_3$ )を表わすパラメータであり、 $\lambda$  は形状パラメータと呼ばれる。 $y(m)$  を残存  $m$  年の割引債のゼロイールドとすると、 $y(m)$  と  $f(m)$  の間には以下の関係が成り立つことから、

$$y(m) = \frac{1}{m} \int_0^m f(u) du$$

ゼロイールドカーブは、

$$y(m) = \beta_1 + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{-m\lambda}}{m\lambda} \right) + \beta_3 \left( \frac{1 - e^{-m\lambda}}{m\lambda} - e^{-m\lambda} \right) \quad (15)$$

と表現できる。

本稿では  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  を時変パラメータとして、VAR モデル、AR モデルの時系列モデルで表現し、モンテカルロ・シミュレーションにより時系列モデルの各パラメータの将来シナリオを生成した後、以下の動的 Nelson-Siegel モデルにより各時点におけるゼロイールドカーブを表現する。Nelson-Siegel モデルのパラメータの推定及び動的 Nelson-Siegel モデルの詳細は付録 C を参照されたい。

$$y_t(m) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left( \frac{1 - e^{-m\lambda_t}}{m\lambda_t} \right) + \beta_{3,t} \left( \frac{1 - e^{-m\lambda_t}}{m\lambda_t} - e^{-m\lambda_t} \right) \quad (16)$$

## 5. 日本市場における適用例

本節では、日本市場における実績死亡率と実績イールドカーブのデータを用いて、死亡率の予測と金利シナリオの生成を行い、第3節で述べた逐次推定・最適化アルゴリズム及びALM最適化モデルを適用した場合の分析結果について述べる。

### 5.1. 死亡率モデル

まず、Lee-Carterモデルのパラメータ推定期間を1965年～1994年までの30年間とし、暦年要因パラメータの推定に一般化加法モデルと、比較のためにARIMAモデルも適用し、1995年～2014年までの20年間の死亡率の予測を行う。ただし、実績死亡率は、国立社会保障・人口問題研究所が厚生労働省の「人口動態統計」に基づき研究者向けに作成した生命表<sup>3</sup>に基づく。

---

<sup>3</sup>国立社会保障・人口問題研究所ウェブサイト：

[http://www.ipss.go.jp/p-toukei/JMD/00/STATS/mltper\\_1x1.txt](http://www.ipss.go.jp/p-toukei/JMD/00/STATS/mltper_1x1.txt)

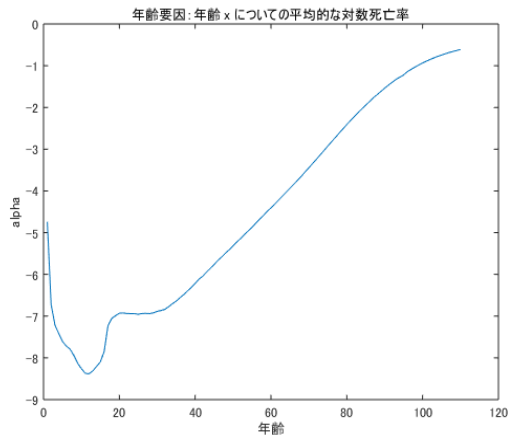


図 5.1 : 年齢要因  $\alpha_x$  (横軸 : 年齢)

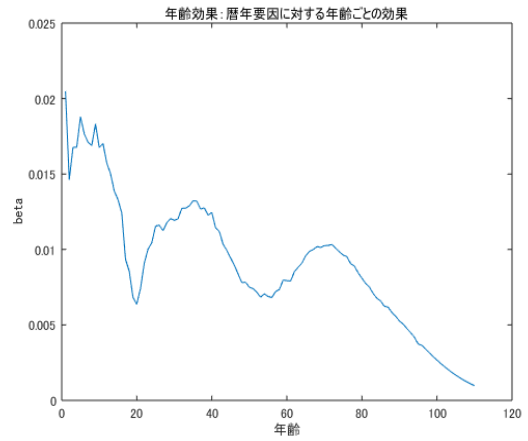


図 5.3 : 年齢効果  $\beta_x$  (横軸 : 年齢)

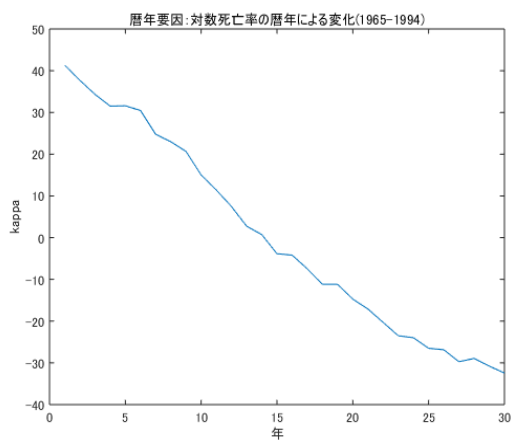


図 5.2 : 暦年要因  $\kappa_t$  (横軸 : 学習期間)

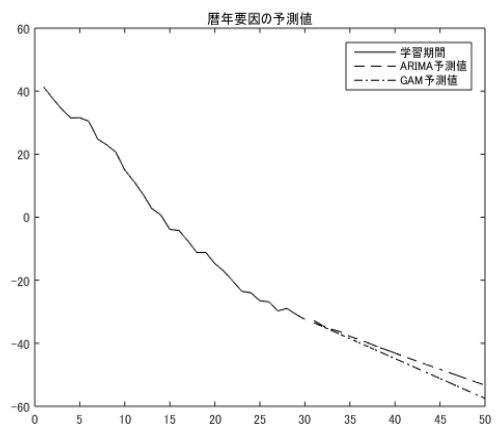


図 5.4 : 暦年要因の予測値  $\hat{\kappa}_t$

図 5.1～図 5.3 はパラメータの推定期間における Lee-Carter モデルの各パラメータの分析結果である。グラフの形状から年齢要因 $\alpha_x$  (図 5.1) については、加齢となるほど対数死亡率が上昇し、特に 30 歳代からは線形的に死亡率が増加していることがみとれる。対数死亡率の暦年要因 $\kappa_t$  (図 5.2) については、インサンプル期間における年数が経過するほど死亡率のトレンドが低下していることが分かる。年齢効果 $\beta_x$  (図 5.3) については、暦年要因 $\kappa_t$ の影響が 10 歳までと、30 歳代、70 歳代で大きくなっていることが伺える。

暦年要因のパラメータ予測値については、ARIMA モデル<sup>4</sup>及び一般化加法モデルにより求めた。図 5.4 は ARIMA モデル (破線, 上線) 及び一般化加法モデル (一点鎖線, 下線) により予測した暦年要因パラメータである。これによると一般化加法モデルによる予測は、ARIMA モデルによる予測よりも、対数死亡率の低下トレンドが急であることが分かる。

表 5.1 : 死亡率の予測誤差

	0歳～109歳		30歳～49歳			0歳～109歳		30歳～49歳	
	ARIMA	GAM	ARIMA	GAM		ARIMA	GAM	ARIMA	GAM
1995年	0.0053949	0.0056093	0.0001450	0.0001390	2005年	0.0067467	0.0059559	0.0001587	0.0001617
1996年	0.0047066	0.0045822	0.0001122	0.0001093	2006年	0.0097538	0.0088172	0.0001468	0.0001422
1997年	0.0045315	0.0043419	0.0001409	0.0001352	2007年	0.0107840	0.0097513	0.0001797	0.0001718
1998年	0.0059074	0.0055493	0.0001084	0.0001098	2008年	0.0083006	0.0072052	0.0001966	0.0001803
1999年	0.0029554	0.0028094	0.0001190	0.0001245	2009年	0.0106962	0.0094644	0.0002048	0.0001891
2000年	0.0088242	0.0083954	0.0001351	0.0001351	2010年	0.0073240	0.0061570	0.0002191	0.0001959
2001年	0.0093629	0.0088371	0.0001544	0.0001524	2011年	0.0068091	0.0056164	0.0002311	0.0002135
2002年	0.0115423	0.0109798	0.0001618	0.0001585	2012年	0.0069917	0.0059269	0.0002734	0.0002346
2003年	0.0095382	0.0088610	0.0001671	0.0001722	2013年	0.0084976	0.0069843	0.0002978	0.0002546
2004年	0.0116515	0.0108956	0.0001803	0.0001807	2014年	0.0081124	0.0065207	0.0002864	0.0002424
					平均	0.0079216	0.0071630	0.0001809	0.0001701

表 5.1 は、図 5.4 で示した暦年要因のパラメータ予測値を用いて死亡率の予測を行った際の予測死亡率と実績死亡率との二乗平均誤差平方根 (Root Mean Square Error; RMSE)<sup>5</sup>を比較したものである。表の 2 列目と 3 列目は全年齢 (0～109 歳) を対象にした RMSE、表の 4 列目と 5 列目には本研究の対象年齢である 30～49 歳の人の RMSE を ARIMA モデル、一般化加法モデル (GAM) に分けて表示している。これによると、全年齢においても本研究の対象年齢においても、一般化加法モデルの方が予測誤差 (RMSE) は概ね小さくなっていることが分かる。よって、本研究では死亡率の予測に用いる暦年要因のパラメータ予測には一般化加法モデルを適用する。

## 5.2. 金利期間構造モデル

<sup>4</sup> ARIMA モデルの次数については、ADF 検定により 1 次和分過程であることを確認したあと、AIC (赤池情報量基準) により (3,1,0) を選択した。

<sup>5</sup>RMSE =  $\sqrt{\frac{1}{\omega} \sum_{x=0}^{\omega} (q_{x,t} - \tilde{q}_{x,t})^2}$ ,  $q_{x,t}$ :  $t$ 年における $x$ 歳の人の実績死亡率,

$\tilde{q}_{x,t}$ :  $t$ 年における $x$ 歳の人の予測死亡率

分析に用いたデータは財務省の Web サイト<sup>6</sup>で公表されている、満期までの残存期間が1年～20年の国債パーイールド（月末値）を、ブートストラップ法により変換したゼロイールドである。パーイールドは、価格が額面（パー）に等しい利付債の複利最終利回り、ゼロイールドは割引債の複利最終利回りを指す。ブートストラップ法は固定利付債のパーイールドを用いて、残存期間の短いゼロイールドから残存期間の長いゼロイールドを順次計算していく手法であり、例えば高橋（2006）にその計算方法が記載されている。本研究では、国債の利払い間隔は簡単のため年1回利払い（年末）とし、対象年限のパーイールドが不足する年限については、3次スプライン法により補間した。1990年1月～1994年12月の60ヶ月を初期時点のパラメータ推定期間（インサンプル期間）とし、12月後（1995年12月）のパラメータのシナリオ（アウトオブサンプル）をモンテカルロ・シミュレーションにより生成する。以降、1年ごとにスライドしながら繰り返し予測を行う。最終のパラメータ推定期間（インサンプル期間）は2009年1月～2013年12月であり、2014年12月時点のパラメータのシナリオ（アウトオブサンプル）を生成する。本研究でヘッジ対象となる保険負債については満期を設定していることから、リバランスのたびに予測する将来キャッシュフローの期間は短くなっていく。そこで金利シナリオの生成についても、負債キャッシュフローの年限に合わせ、1年ごとに予測する年限が短くなる設定とする。

---

<sup>6</sup> 財務省ウェブサイト：[http://www.mof.go.jp/jgbs/reference/interest\\_rate/](http://www.mof.go.jp/jgbs/reference/interest_rate/)

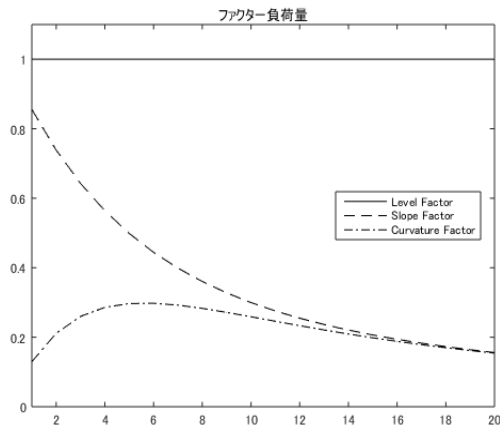


図 5.5： ファクター負荷量

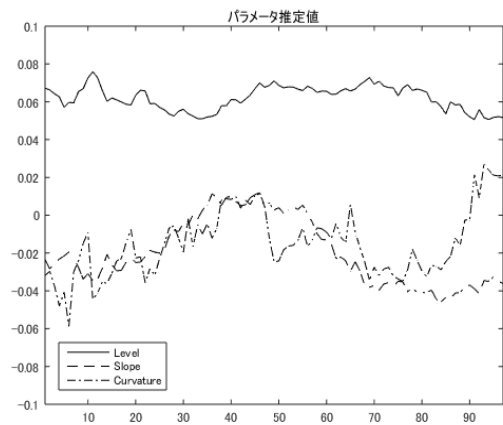


図 5.6： パラメータ推定値

図 5.5 は Nelson-Siegel モデルのファクター負荷量である。尚、ファクター負荷量を計算する際の形状パラメータ  $\lambda$  の値には 0.32 を使用した。これは、20 年国債が発行された 1986 年 12 月から 1 期目のインサンプル期間の終わりである 1994 年 12 月までの 97 か月間を対象に、実際のゼロイールドカーブと Nelson-Siegel モデルによる理論ゼロイールドカーブとの残差二乗和(SOSE: Sum of Square Error)の合計値( $\sum_t U_t(\lambda)$ )を最小とする値である<sup>7</sup>。図 5.5 によると、 $\hat{\beta}_{1,t}(\hat{\lambda})$ パラメータのファクター負荷量は常に 1 であるためグラフは直線となり、 $\hat{\beta}_{2,t}(\hat{\lambda})$ パラメータは年限が増加するにつれて値が 0 に向け逓減、 $\hat{\beta}_{3,t}(\hat{\lambda})$ パラメータは上に凸型の曲線となっている。多くの先行研究から、イールドカーブの期間構造は水準、傾き、曲率の 3 つのパラメータにより説明可能とされているが、図 5.5 の各パラメータのファクター負荷量からも、 $\hat{\beta}_{1,t}(\hat{\lambda})$ パラメータが「水準」、 $\hat{\beta}_{2,t}(\hat{\lambda})$ パラメータが「傾き」、 $\hat{\beta}_{3,t}(\hat{\lambda})$ パラメータが「曲率」を表現するのに整合的な形状をしていると解釈できる。図 5.6 では、例として 20 年国債の発行が開始された 1986 年 12 月から 1 期目のインサンプル期間の終わりである 1994 年 12 月までの 97 か月間におけるパラメータ推定値を示している。

将来のゼロイールドカーブのシナリオを生成するには、まずパラメータ推定期間（インサンプル期間）60 ヶ月におけるパラメータ推定値（原系列及び 1 次差分系列<sup>8</sup>）に対し AR(1),VAR(1)の時系列モデルを適用し、モンテカルロ・シミュレーションにより 12 か月後のパラメータのシナリオを生成する（サンプルパス：1000 シナリオ）。生成した各パラメータのシナリオ ( $\hat{\beta}_{i,t}^q, i = 1,2,3, q = 1,2,\dots,k, k = 1000$ )と形状パラメータ  $\lambda$ 、ファクター負荷量を用いて、以下の式によりアウトオブサンプル期間におけるゼロイールドカーブの予測シナリオを求める。形状パラメータ  $\lambda$  には前述の値 (0.32) を使用する。ファクター負荷量はその  $\lambda$  値 (0.32) を代入して求めた値である。 $m$  はイールドの満期までの期間を表わす。

$$\hat{y}_t^q(m) = \hat{\beta}_{1,t}^q + \hat{\beta}_{2,t}^q \left( \frac{1 - e^{-m\lambda_t}}{m\lambda_t} \right) + \hat{\beta}_{3,t}^q \left( \frac{1 - e^{-m\lambda_t}}{m\lambda_t} - e^{-m\lambda_t} \right) \quad (17)$$

<sup>7</sup>  $\lambda$  の値を 0.01 刻みで動かして、残差二乗和が最小となる値を求めた。

<sup>8</sup> 原系列を  $r_t$  とすると、一次差分系列は  $r_t - r_{t-1}$  で表現される。

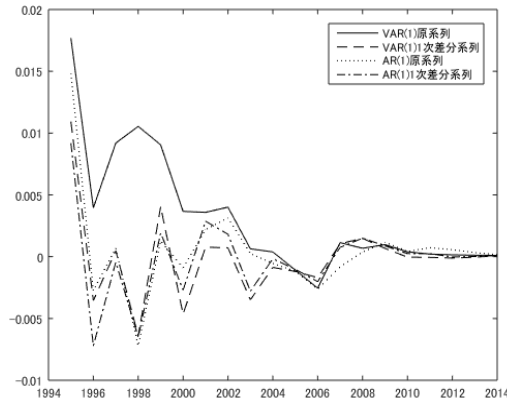


図 5.7 : イールドカーブの予測誤差

図 5.7 は (17)式より求めたシナリオの平均値を用いて、実際の市場ゼロイールドカーブとの予測誤差を示したものである。予測誤差については、以下の式から求めた。

$$\text{予測誤差} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \text{yield}_{t,n}^{\text{sim}} - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \text{yield}_{t,n}^{\text{act}} \quad (18)$$

但し、 $\text{yield}_{t,n}^{\text{sim}}$  :  $t$  年における残存  $n$  年のシナリオ予測平均値、 $\text{yield}_{t,n}^{\text{act}}$  :  $t$  年における残存  $n$  年の市場ゼロイールド、 $N$  : 負債の残存年限 (年単位グリッド数) である。

図 5.7 からは、どの時系列モデルにおいても、予測期間当初は実際のイールドカーブからの乖離が大きいものの、保険期間の終わりに近づいてくると、生成するイールドカーブの年限が短くなるため、どの時系列モデルにおいても予測誤差が小さくなっていることが分かる。

### 5.3. サープラスの推定

最後に、逐次推定・最適化アルゴリズムによる各期の最適化により、1 年後ごとに更新された最適投資比率を用いてサープラスを計算する。ただし、 $t+1$  時点のサープラスは、 $t$  時点で構築した債券ポートフォリオの  $t+1$  時点における市場時価総額と、 $t+1$  時点から保険期間満期にかけての (Lee-Carter モデルを用いて予測した) 負債キャッシュフローの現在価値の差額である。なお、割引係数は、 $t+1$  時点の市場ゼロイールドから計算した。



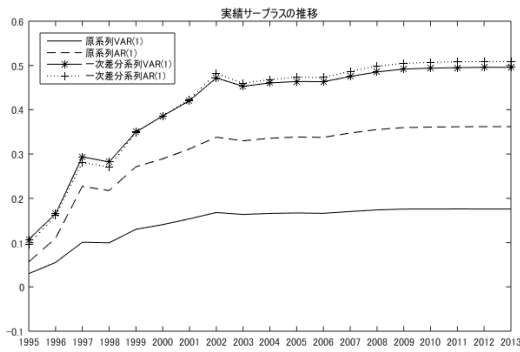


図 5.8：実績サープラス推移（資金先送り無し）

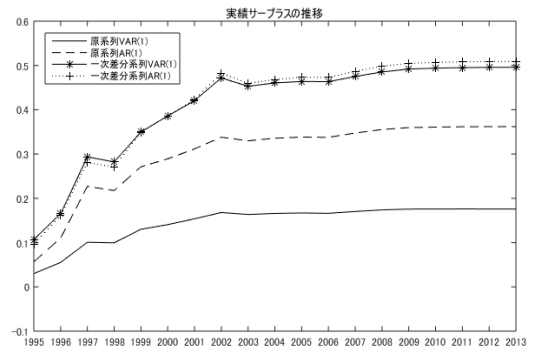


図 5.9：実績サープラス推移（資金先送りあり）

表 5.2：実績サープラスの累積値と分散

(1) リバランス：【有】 資金先送り：【無】

	原系列		一次差分系列	
	VAR(1)	AR(1)	VAR(1)	AR(1)
累積値	0.176	0.362	0.496	0.509
分散	0.175%	0.715%	1.264%	1.450%

(2) リバランス：【有】 資金先送り：【有】

	原系列		一次差分系列	
	VAR(1)	AR(1)	VAR(1)	AR(1)
累積値	0.168	0.338	0.464	0.477
分散	0.165%	0.637%	1.131%	1.299%

(3) リバランス：【無】

	原系列		一次差分系列	
	VAR(1)	AR(1)	VAR(1)	AR(1)
累積値	0.083	0.180	0.367	0.343
分散	0.920%	3.440%	13.600%	11.050%

図 5.8, 図 5.9 は時系列モデルごとの実績サープラスの推移を図示したもの、表 5.2 は実績サープラスの累積値とその分散を示したものである。表 5.2 では、動的ヘッジによる効果を確認するため、リバランス有りのケース (1), (2) と、無しのケース (3), のそれぞれの結果を記載, また余剰資金の先送り効果を確認するため、リバランス有りのケースにおいては、余剰資金の先送りを考慮するケース (2) と考慮しないケース (1) の結果をそれぞれ記載している。これによると、リバランスについては 取引コスト<sup>9</sup>を考慮した上でも、定期的にリバランスを行う方が、累積サープラスの値が増加し、分散も大幅に低下することが確認された。これは定期的にモデルパラメータを再計算し、最適ポートフォリオを更新し

<sup>9</sup> 利付債の取引コストは、内枠方式で算出されるのが一般的である。そこで本論文では、購入および売却金額に  $(1 - \frac{1}{(1+\rho)})$  を乗じた金額を、取引を仲介する証券会社へ支払う取引コストとし、取引コストを算出する比率として  $\rho = 0.005\%(0.5bp)$  を設定するものとする。

ていくことで、負債キャッシュフローに対する資産キャッシュフローの不足リスクを抑制できたことが要因であると考えられる。さらに、リバランス有りの場合は、各期の余剰資金を先送りできるケースの方の分散が小さく、リスクの低い運用結果になっていることが分かる。これは、余剰資金を考慮しない場合に比べ、余剰資金を考慮する場合は、債券ポートフォリオから得られる資産キャッシュフローの金額が少なく済むため、その分、債券ポートフォリオの金利感応度も低下していることが要因であると考えられる。

表 5.3：時系列モデル別の CVaR

時系列モデル	先送り	平均値	最大値	最小値
原系列 VAR(1)	有	-0.00003	0.04723	-0.16796
	無	0.00782	0.09071	-0.17578
原系列 AR(1)	有	-0.00241	0.08348	-0.33823
	無	0.01040	0.16131	-0.36205
一次差分系列 VAR(1)	有	-0.00795	0.10002	-0.46417
	無	0.00595	0.19192	-0.49611
一次差分系列 AR(1)	有	0.00278	0.11346	-0.47732
	無	0.02705	0.21790	-0.50929

表 5.3 は時系列モデルごとに、余剰資金の先送りを考慮するケースと考慮しないケースの CVaR の値を、それぞれ示したものである。これによると、余剰資金の先送りを許すモデルの方が CVaR の絶対値で見て、平均値が概ね 0 に近い水準となっており、負債キャッシュフローに対する資産キャッシュフローの下振れリスク（乖離リスク）が抑制できていることが分かる。特に、CVaR の最大値を見ると、どの時系列モデルにおいても余剰資金の先送りを許すモデルの方が、そうでないケースの半分程度の値にリスクが抑制されており、高いリスク削減効果を確認することができる。CVaR の最小値をみると、全てのケースにおいて値がマイナスとなっているが、これは保険期間満期にかけては、どの時系列モデルにおいても資産残高が増加し、CVaR を計算するような金利低下のワーストケースに近い状態であっても、負債キャッシュフローに対する資産キャッシュフローの不足が生じなくなったのが要因であると考えられる。このことは、図 5.8、図 5.9 の実績サープラスの推移からも確認することができる。

## 6. まとめ

本研究では、経済価値ベースの ALM の枠組みの下で、生命保険支払額における将来キャッシュフローの現在価値によって与えられる負債価値の時間的な変動に対する資産側の動的ヘッジ戦略を新たに提案した。その際、負債及び資産の将来キャッシュフローを予測、あるいは確率モデルを用いたシナリオを生成した上で損失を抑制するための最適化問題を定式化し、さらに各期でリバランスをする際にモデルパラメータを再推定して投資配分比率を計算するという、逐次推定・最適化の考え方を適用した。各期の最適化問題においては、損失に対する CVaR を最小化する資産側の投資配分比率を求め、日本市場における実績データを用いて、動的ヘッジ戦略のサープラスに対する損失抑制効果を検証した。具体的には、

1995年12月から2014年12月の期間の金利、死亡率の実績データに対して、提案モデルを適用した実証分析を実施し、取引コストに対するペナルティを考慮した上でも、累積サープラスによって与えられる損失が抑制されることを示した。

分析の結果、Nelson-Siegel モデルの水準・傾き・曲率のパラメータに適用する時系列モデルごとで、最終的な累積サープラスの値には差が生じるものの、全ての時系列モデルで累積サープラスによって与えられる損失が抑制されることが確認された。これは、最適化問題の設定から見れば、金利低下のワーストケースに近いシナリオで負債キャッシュフローに対する資産キャッシュフローの不足リスク(CVaR)を最小化しているため、結果として分析期間における市場金利の低下に対して、頑健なポートフォリオが構築できたためと考えられる。次に逐次推定・最適化アルゴリズム適用の側面から見ると、取引コストのペナルティを考慮してもなお定期的にリバランスを行い、モデルパラメータの再計算及び最適ポートフォリオの更新を行う方が、サープラスの変動リスク(分散)を減少させ、結果として累積サープラスの値も大きくなることが確認された。これは実際の金利情勢の時間的な変化に対応して動的な対応を行うことにより、リスクが抑制されたことが原因の一つとして考えられる。また、CVaR 最小化モデルについては、各期の余剰資金の先送りを考慮するほうがCVaRの値(絶対値)も小さく、さらにサープラスの変動リスク(分散)も減少することになった。このことは、余剰資金の先送りを考慮することで、余剰資金の分だけ当期の投資資金が増加し、負債キャッシュフローに対する資産キャッシュフローの下振れリスクが低減したためと考えられる。今後の課題としては、複数の保険商品を保有する場合の負債キャッシュフローに対する資産側のポートフォリオ最適化への適用や、保険契約者数も変化することで複数の負債キャッシュフローシナリオを考慮する場合への拡張があげられる。

## 【参考文献】

- Francis X. Diebold. and Canlin Li. (2006), "Forecasting the term structure of government bond yields," *Journal of Econometrics* **130**, 337-364.
- Garud Iyengar. and Alfred ka Chun Ma. (2009), "Cash Flow Matching : A Risk Management Approach," *North American Actuarial Journal, Volume 13, Number 3*, 370-384.
- Hastie T. and Tibshirani R. (1990), *Generalized Additive Models*, Chapman & Hall.
- Hull John. and Alan White. (1990), "Pricing Interest Rate Derivative Securities," *The Review of Financial Studies*, **3**(4), 573-592.
- Lee R.D. and Carter L.R. (1992), "Modeling and forecasting U.S. mortality," *Journal of the American Statistical Association*, **87**, 659-675.
- Marie-Claire Koissi. and Arnold F.Shapiro. (2012), "THE LEE-CARTER MODEL UNDER THE CONDITION OF VARIABLES AGE-SPECIFIC PARAMETERS," *Population Association of America 2012 Annual Meeting Program*.
- Nelson C. R. and A. F. Siegel. (1987), "Parsimonious modeling of yield curves," *Journal of Business*, **60**(4), 473 - 489.
- Rockafellar.R.T. and Uryasev.S. (2000), "Optimization of conditional value-at-risk," *Journal of Risk*, Vol 2, 21-41.
- Rockafellar.R.T. and Uryasev.S. (2002), "Conditional value-at-risk for general loss distributions," *Journal of Banking & Finance* **26**, 1443-1471.
- Simon.N. Wood. (2006), *Generalized Additive Models: An Introduction with R*, Chapman & Hall.
- Takeshi Kobayashi. (2016), "A Macro-Financial Analysis of the Term Structure of Credit Spreads in Japanese Corporate Bond Market : A Global Factor Approach," 『第 24 回日本ファイナンス学会大会予稿集』.
- Yuji Yamada. and James A.Primbs. (2012), "Model Predictive Control for Optimal Portfolios with Cointegrated Pairs of Stocks," *51<sup>st</sup> IEEE Conference on Decision and Control December 10-13, 2012. Maui, Hawaii, USA*.
- 飯沼邦彦 (2009), 「ソルベンシー II 導入を見据えた保険会社のマーケットリスクに関わる ALM の方向性について～欧州への事例と日本への応用～」『日本アクチュアリー会例会用資料』.
- 沖本竜義 (2010), 『経済・ファイナンスデータの計量時系列分析』朝倉書店.
- 小暮厚之編著 (2007), 『リスクの科学-金融と保険のモデル分析-』朝倉書店.
- 小暮厚之・長谷川知弘 (2005), 「将来生命表の統計モデリング : Lee-Carter 法とその拡張 -ヒューマンセキュリティへの基盤研究-」『総合政策学ワーキングペーパーシリーズ No.71』.
- 辻谷将明・外山信夫 (2007), 「R による GAM 入門」『行動計量学』 **34** (1), 111-131.
- 高橋豊治 (2006), 「公社債流通市場におけるイールド・カーブの計測」『企業研究 第 9 号原稿』.
- 野波健蔵・水野毅・ほか編 (2015), 『制御の辞典』, 朝倉書店.
- 濱谷健史 (2008), 「複数の確率水準に対する CVaR を用いるポートフォリオ最適化モデル」『京都大学特別研究報告書』.
- 藤井真理子・高岡慎 (2008), 「金利の期間構造とマクロ経済 : Nelson-Siegel モデルを用いた実証分析」『金融庁金融研究センター ディスカッションペーパー』.
- 山井康浩・吉羽要直 (2001), 「期待ショートフォールによるポートフォリオのリスク計測-具体的な計算例による考察-」『日本銀行金融研究所/金融研究/2001.12』.
- 山井康浩・吉羽要直 (2001), 「リスク指標の性質に関する理論的整理-VaR と期待ショートフォールの比較分析-」『日本銀行金融研究所/金融研究/2001.12』.

山田雄二 (2008), 「風速予測誤差に基づく風力デリバティブの最適化設計」津田博史・中妻照雄・山田雄二編  
『ジャフイー・ジャーナルー金融工学と市場計量分析 非流動性資産の価格付けとリアルオプション』朝倉  
書店, 152-181.

## 付録 A キャッシュフロー二乗誤差最小化

目的関数として、資産と負債の将来キャッシュフローの二乗誤差を最小化する、キャッシュフロー二乗誤差最小化モデルを以下の通り定義する。

$$\text{Minimize } \| \mathbf{H} \mathbf{x}_t - \mathbf{F} \|_2^2$$

$$\text{Subject to } \mathbf{x}_t \geq 0$$

但し、 $\mathbf{H} = \{h_{m,1}^{(j)} + h_{m,2}^{(j)} + \dots + h_{m,k}^{(j)}\}, j = 1, 2, \dots, n$  ,  $F_m^{LC} = \text{vector}(f_1^{LC}, f_2^{LC}, \dots, f_n^{LC})^T$  ,  $\mathbf{F} = \{F_m^{LC} \times 1000\}$  である。 $\mathbf{F}$  は  $\mathbf{H}$  とシナリオ数の単位を揃えるために 1000 倍している ( $k = 1000$ )。

初期時点における投資金額は、時点 0 における将来の予測負債キャッシュフローの現在価値総額とする。

$$\text{ones}(1, n) \mathbf{x}_0 = (1 + \rho)^{-1} F_{t+1}^{LC T} (DF1_0, DF2_0, \dots, DFn_0)^T$$

時点 1 以降については、 $t$  時点で構築した債券ポートフォリオの  $t + 1$  時点における時価金額から、 $t + 1$  時点で支払った実績負債キャッシュフロー  $f_{t+1}$  を差し引いた投資可能金額の全額を再投資するものとする。

$$\text{ones}(1, n) \mathbf{x}_{t+1} =$$

$$(1 + \rho)^{-1} \left[ (1 + \rho)^{-1} (CIF_t^{n \times n} (1, DF1_{t+1}, \dots, DFn - 1_{t+1})^T)^T \mathbf{x}_t - f_{t+1} + (CIF_t^{n \times 1})^T \mathbf{x}_t \rho \right]$$

キャッシュフロー二乗誤差最小化の最適化モデルに逐次推定・最適化のアルゴリズムを適用し、1995 年 12 月～2014 年 12 月の日本市場に適用した結果は以下の通りである。

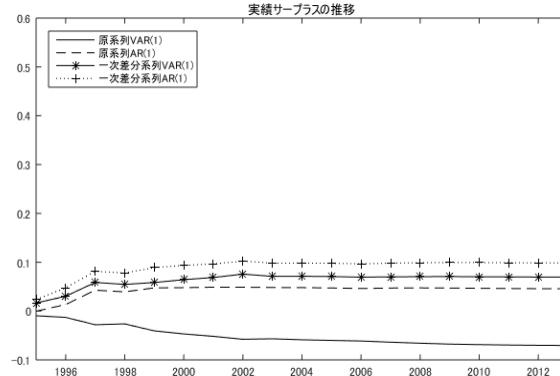


図 付録 A.1 : 実績サープラスの推移

表 付録 A.1 : 実績サープラスの累積値と分散

	原系列		一次差分系列	
	VAR(1)	AR(1)	VAR(1)	AR(1)
累積値	-0.071	0.045	0.069	0.099
分散	0.036%	0.015%	0.021%	0.037%

図 付録 A.1 は時系列モデルごとの実績サープラスの推移、表 付録 A.1 は実績サープラスの累積値と

その分散を示したものである。CVaR 最小化のケースと違い、キャッシュフロー二乗誤差最小化では、Nelson-Siegel モデルの水準、傾き、曲率のパラメータ原系列に VAR(1)モデルを適用した場合には実績サープラスがマイナスで推移した。各パラメータに残る3つの時系列モデルを適用した場合も、CVaR 最小化のケースよりは、実績サープラスの水準が低くなっている。これは、キャッシュフロー二乗誤差最小化では、シナリオの平均を上回るケースも、下回るケースも、いずれもリスクとして最適化を行っていることから、負債キャッシュフローに対する資産キャッシュフローの不足額 (CVaR) で評価する場合と違い、金利シナリオの予測精度に、実績サープラスが影響を受けている部分が、大きくなっているためと考えられる。

## 付録 B Lee-Carter モデル

Lee-Carter モデルは  $t$  年における  $x$  歳の人の対数死亡率を次式で表現するモデルである。

$$\ln(q_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{x,t}$$

ただし、 $\varepsilon_{x,t}$  は残差項である。パラメータの推定にあたっては、 $\alpha_x, \beta_x, \kappa_t$  のこれらパラメータを識別可能とするために、パラメータ間に以下の制約を課する。 $\omega$  は生命表における年齢の最大値である。

$$\sum_{x=0}^{\omega} \beta_x = 1, \quad \sum_{t=1}^T \kappa_t = 0$$

各パラメータの定性的な解釈は、 $\alpha_x$  (年齢要因) : 年齢  $x$  の平均的な対数死亡率、 $\kappa_t$  (暦年要因) : 対数死亡率の暦年  $t$  による変化、 $\beta_x$  (年齢効果) : 暦年要因に対する年齢ごとの効果、である。各パラメータの推定値は、上記の識別制約の下で、次式を最小化することにより得られる。

$$\sum_{x=0}^{\omega} \sum_{t=1}^T (\ln(q_{x,t}) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2$$

将来の死亡率をシミュレーションするには、以上の手続きから得た暦年要因の推定値  $\hat{\kappa}_t$  に ARIMA モデルを適用し、暦年要因の外挿予測値  $\tilde{\kappa}_t$  を求めた後、年齢要因パラメータの推定値、年齢効果パラメータの推定値を用いて、以下の式により求めればよい。小暮 (2007) では、暦年要因の推定値  $\hat{\kappa}_t$  に適合する時系列モデルは ARIMA モデルを使用するのが標準的な手続き<sup>10</sup>としているが、本研究では一般化加法モデル (Generalized Additive Model : 以下 GAM) を適用することを考える。一般化加法モデルの外挿予測値の求め方については、山田 (2008) が詳しい。

$$\tilde{q}_{x,t} = \exp\{\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \tilde{\kappa}_t\}$$

## 付録 C 動的 Nelson-Siegel モデル

本稿では Nelson-Siegel モデルの水準、傾き、曲率の各パラメータを時変パラメータとして取り扱い、以下の動的 Nelson-Siegel モデルにより各時点におけるゼロイールドカーブを表現する。

$$y_t(m) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left( \frac{1 - e^{-m\lambda_t}}{m\lambda_t} \right) + \beta_{3,t} \left( \frac{1 - e^{-m\lambda_t}}{m\lambda_t} - e^{-m\lambda_t} \right)$$

<sup>10</sup> インサンプル期間が短い場合は、ランダムウォークモデルを使用する場合もある。

$\beta_{1,t}, \beta_{2,t}, \beta_{3,t}$  に対して適用する時系列モデルは以下の通りである。

- AR(1)モデル

$$\beta_{x,t} = c_x + \phi_1 \beta_{x,t-1} + \varepsilon_{x,t} \quad , \quad \varepsilon_{x,t} \sim \text{W.N.}(\sigma^2)$$

- VAR(1)モデル

$$\begin{pmatrix} \beta_{1,t} \\ \beta_{2,t} \\ \beta_{3,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{1,t-1} \\ \beta_{2,t-1} \\ \beta_{3,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \varepsilon_{3,t} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \varepsilon_{3,t} \end{pmatrix} \sim \text{W.N.}(\Sigma)$$

但し、 $\Sigma[i,j] = \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$  である。

パラメータの具体的な推定手順は以下の通りである。

- (1)  $\lambda$  値を任意の定数により与えて、ファクター負荷量を求める。
- (2) 上記ファクター負荷量から、各時点におけるパラメータの推定値(水準、傾き、曲率)を線形回帰の回帰係数(最小二乗推定値)として得る<sup>11</sup>。
- (3) 形状パラメータ  $\lambda$  は、実際のイールドカーブと理論イールドカーブ(Nelson-Siegelモデル)との残差二乗和(SOSE: Sum of Square Error)の合計値( $\sum_t U_t(\lambda)$ )が最小となる値を選択する。

$$U_t(\lambda) = \sum_{j=1}^s \left[ y_t(m_j) - \beta_{1,t} - \beta_{2,t} \left( \frac{1 - e^{-m_j \lambda_t}}{m_j \lambda_t} \right) - \beta_{3,t} \left( \frac{1 - e^{-m_j \lambda_t}}{m_j \lambda_t} - e^{-m_j \lambda_t} \right) \right]^2$$

- (4) 上記で得られた  $\hat{\lambda}$  を使用してファクター負荷量、及び水準 ( $\hat{\beta}_{1,t}(\hat{\lambda})$ )、傾き ( $\hat{\beta}_{2,t}(\hat{\lambda})$ )、曲率 ( $\hat{\beta}_{3,t}(\hat{\lambda})$ ) のパラメータ推定値を再計算する。尚、形状パラメータ  $\lambda$  はインサンプル期間の全てにおいて時変的な値を使用することもできるが、本研究では推定の安定性を優先するため、インサンプル期間の全ての時点において共通の値を使用する。
- (5) 上記の手続きにより求めた水準(Level)、傾き<sup>12</sup>(Slope)、曲率<sup>13</sup>(Curvature)の各パラメータの原系列と一次差分系列に対して、それぞれAR(1)、VAR(1)の時系列モデルを適用後、モンテカルロ・シミュレーションにより将来のゼロイールドカーブの予測シナリオを生成する。尚、本研究では、VAR(1)モデルについてはパラメータ間の相関を考慮するが、AR(1)モデルについては、各パラメータは独立であるとの前提を置く。

(穴山裕司：ソニー生命保険)<sup>14</sup>

(山田雄二：筑波大学大学院ビジネス科学研究科)

<sup>11</sup> Nelson-Siegelモデルの理論イールドカーブに対する非負制約を付したうえで最小二乗推定値を求めている。

<sup>12</sup> 長短金利差を表わす。

<sup>13</sup> バラフライスプレッドを表わし、「たわみ」とも表現される。

<sup>14</sup> 本稿は筆者の個人的見解であり、所属する企業の公式見解ではない。