

I-共変動: 市場ユニバースにおける新たなリスク指標

山田 雄二^{*}, 吉野 貴晶[†], 斉藤 哲朗[‡]

概要

本論文では、資本資産価格付けモデル (CAPM) におけるベータを、市場ポートフォリオ超過収益率の高次項を考慮するように拡張した共変動と呼ばれるリスク指標の問題点を指摘した上で、新たな指標として Idiosyncratic 共変動 (I-共変動) を提案し、その性質について議論する。I-共変動とは、市場ポートフォリオ超過収益率の累乗の空間に対する個別資産超過収益率 (あるいは前段階回帰の残差項) の直交射影を与える回帰係数によって定義され、1 次の I-共変動は個別資産のベータを与える一方、2 次の I-共変動は市場ユニバースにおける個別資産収益率の分布の歪み、3 次の I-共変動は裾野の特性に関係する。ここでは、I-共変動が以下の性質をもつことを示す。(a) 全ての資産収益率が正規分布に従えば、2 次以上の I-共変動は全て 0 であり、また、(b) 2 次以上の I-共変動の市場ポートフォリオ重みによる加重平均は 0 である。性質 (a), (b) から、クロスセクション方向での I-共変動の分布における標準偏差等の統計量は、市場ユニバース全体における正規性からのかい離を測る尺度を与える。以上を念頭に、本論文では、東証 1 部上場銘柄を分析対象に 6 次までの I-共変動を推定した上で、全対象銘柄に対する I-共変動が有意な銘柄の割合を I-共変動の有意比率と定義し、日本市場における I-共変動の有意性、および市場ユニバースにおける資産収益率分布の歪みや尖りについて検証する。さらに、期間別、および属性別の I-共変動の特性について分析する。

キーワード: I-共変動, 資本資産価格付けモデル (CAPM), 高次モーメント, 市場ポートフォリオ, ベータ

1 はじめに

伝統的な資本資産価格付けモデル (Capital Asset Pricing Model, 以下 CAPM [13, 17]) をクロスセクション方向で見た場合、個別銘柄の無リスク利子率に対する期待超過収益率は、ベータと呼ばれる、市場ポートフォリオ収益率と個別資産収益率の共分散に関するファクターにのみ依存する。一方、近年、Fama-French の 3 ファクターモデル [7] をはじめとして、CAPM を複数ファクターのケースに拡張する

^{*}筑波大学 ビジネスサイエンス系, Email: yuji@gssm.otsuka.tsukuba.ac.jp

[†]大和証券株式会社 投資戦略部, Email: takaaki.yoshino@daiwa.co.jp

[‡]大和証券株式会社 投資戦略部, Email: tetsuro.saito@daiwa.co.jp

研究が盛んになりつつある。このようなアプローチの背景としては、CAPMにおける投資家のリスク尺度の設定や投資家の非合理性の問題、あるいは資産収益率の正規分布からのかい離の問題などが指摘され、現在でも多くの議論が展開されているホットなトピックの一つである(例えば [3, 12, 16, 18])。本研究では、これらの中でも、CAPMにおけるベータを市場ポートフォリオ超過収益率の高次項を考慮するように拡張した共変動モデルに着目し、新たな指標として Idiosyncratic 共変動 (I-共変動) を提案する。さらに、I-共変動の理論的な性質を示した上で、伝統的な CAPM では捉えることのできない市場ユニバースにおける歪みや尖りの有意性について分析する。

共変動とは、市場ポートフォリオ超過収益率の累乗と個別銘柄超過収益率の共分散によって定義され、正規分布からのかい離が個別資産の期待超過収益率に与える影響の説明要因として [4, 5, 8]、あるいは、プライシングカーネルにおける市場ポートフォリオ超過収益率の非線形性を考慮する目的で導入されてきた [6, 9]。いずれのケースも、富の超過収益率に対する高次項を取り入れた期待効用最大化問題の1階の条件やプライシングカーネルの展開式から、個別資産の期待超過収益率に対する共変動の関係式を導き、実際のデータを用いて、時系列、もしくはクロスセクション方向での有意性を検証するといったものが、共変動を用いた分析の主なアプローチとして挙げられる。さらに、クロスセクション分析においては、2次、または3次の共変動を市場ポートフォリオ超過収益率の中心モーメントで正規化したものを、それぞれ共歪度、共尖度として定義し、1次項であるベータを加えたマルチファクターモデルにおいて、個別資産超過収益率に対するこれらのファクターの影響が検証されている [8]。

本論文では、通常共変動の定義では、仮に全ての資産収益率が正規分布に従ったとしても個別銘柄の期待収益率に対して高次共変動が有意に影響を与えうることを指摘した上で、低次の共変動の影響を取り除いた指標として、Idiosyncratic 共変動 (I-共変動) を新たに提案する。I-共変動とは、市場ポートフォリオ超過収益率の累乗の空間に対する個別資産超過収益率(あるいは前段階回帰の残差項)との直交射影を与える回帰係数によって定義され、1次のI-共変動はCAPMにおける個別資産のベータに等しい。また、I-共変動の性質として、全ての資産収益率が正規分布に従えば2次以上のI-共変動は零となること、2次以上のI-共変動は、市場ポートフォリオの重みで加重平均すれば零になるという基準化条件を満たすことも示される。さらに、2次のI-共変動は市場ユニバースにおける個別資産収益率の分布の歪み、3次のI-共変動は分布の裾野の尺度に関係し、クロスセクション方向でのI-共変動の分布における標準偏差等の統計量は、市場ユニバース全体における歪みや裾野の特性を測る指標を与える。本論文では、東証1部上場銘柄を分析対象に、分析期間における全対象銘柄に対するI-共変動が有意な銘柄の割合をI-共変動の有意比率と定義し、日本市場におけるI-共変動の有意性、およびI-共変動を用いた期間別、あるいは属性別の特徴について検証する。

本論文の構成は以下の通りである。第2節では、共変動を導入した上で、共変動を用いた分析の背景と問題点を述べる。第3節では、共変動に代わる新たな指標としてI-共変動を定義し、その特徴について説明する。第4節では、I-共変動のもつ理論的性質を定理として示す。第5節では、日本市場におけるI-共変動の有意性について、東証一部上場銘柄を対象に実証分析を行う。第6節では、まとめと今後

の課題を述べる。

2 共変動モデル

2.1 共変動とCAPM

投資ユニバースとして、 n 個の個別銘柄 (資産 $i = 1, \dots, n$) とこれらの銘柄によって構成される市場ポートフォリオ M を考え、時点 t における資産 i の超過収益率を $R_{i,t}$, $i = 1, \dots, n$, 市場ポートフォリオの超過収益率を $R_{M,t}$ と表記する。ただし、超過収益率とは、資産収益率 (例えば日次収益率) から無リスク利子率、あるいは資産収益率の期待値を差し引くことにより、

$$R_{i,t} = r_{i,t} - r_f, \quad R_{M,t} = r_{M,t} - r_f \quad (2.1)$$

あるいは、

$$R_{i,t} = r_{i,t} - \bar{r}_i, \quad R_{M,t} = r_{M,t} - \bar{r}_M \quad (2.2)$$

のように与えられるものとする¹。ただし、 $r_{i,t}$ は資産 i の収益率、 r_f は無リスク利子率であり、 $\bar{r}_i := \mathbb{E}[r_{i,t}]$, $\bar{r}_M := \mathbb{E}[r_{M,t}]$ である。本論文では、資産 i と市場ポートフォリオの k 次の共変動を、次式の $C_{iM}^{(k)}$ で定義する²。

$$C_{iM}^{(k)} := \text{Cov} [R_{i,t}, R_{M,t}^k], \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

また、 $C_{iM}^{(k)}$ を $R_{M,t}$ の k 次の中心モーメントで正規化した値を、

$$\kappa_{iM}^{(k)} := \frac{C_{iM}^{(k)}}{\mathbb{E} [\{R_{M,t} - \mathbb{E}[R_{M,t}]\}^{k+1}]}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

のように定義する。

超過収益率が (2.1) 式で与えられる場合、1 次の共変動を市場ポートフォリオ超過収益率の 2 次の中心モーメント (すなわち分散) で正規化した値である

$$\kappa_{iM}^{(1)} = \frac{C_{iM}^{(1)}}{\text{Var} [R_{M,t}]} \quad (2.5)$$

は CAPM のベータを与え、平均・分散効率性の仮定の下、次式が成立する [13, 17]。

$$\begin{aligned} \bar{r}_i - r_f &= \kappa_{iM}^{(1)} (\bar{r}_M - r_f) \\ &= \frac{C_{iM}^{(1)}}{\text{Var} [R_{M,t}]} (\bar{r}_M - r_f) \end{aligned} \quad (2.6)$$

¹本論文では、確率変数 X, Y に対し、期待値、分散、共分散を、それぞれ、 $\mathbb{E}[X]$, $\text{Var}[X]$, $\text{Cov}[X, Y]$ のように表記する。また、 $\bar{X} := \mathbb{E}[X]$ とし、 X が m 次元ベクトルの場合、 $\bar{X} \in \mathfrak{R}^m$ は、 X の期待値ベクトルを与えるとする。

² r_f を定数とした場合、1 次共変動は超過収益率の選び方 ((2.1) 式、あるいは (2.2) 式) に依らず等しい。一方、2 次以上については、共変動の定義は超過収益率の選び方に依存するが、実証分析において両者の差はほとんど観測されない。ただし、理論的な取り扱いにおいて両者を区別する必要がある場合があるので、その際はどちらの定義によるものか、その都度明記するものとする。

(2.6) 式における右辺の $\bar{r}_M - r_f, \text{Var}[R_{M,t}]$ は市場ポートフォリオの期待超過収益率および分散であり、資産の個別性を示す i によらず全ての投資ユニバースに対して一定である。従って、(2.6) 式は、通常の CAPM における仮定の下では、個別資産の期待超過収益率は 1 次の共変動 $C_{iM}^{(1)}$ (あるいは $\kappa_{iM}^{(1)}$) の 1 次式となることを示している。

一方、文献 [8] では、投資家の効用関数を、2 次までのモーメント情報に対応する平均・分散のみならず、3 次以上の高次モーメントを考慮するように拡張した場合、個別資産の期待超過収益率は 2 次以上の共変動にも依存し、個別資産の期待超過収益率 $\bar{r}_i - r_f$ が $C_{iM}^{(k)}$ (あるいは $\kappa_{iM}^{(k)}, k = 1, 2, \dots$) の線形式として記述されることを示している。ただし、個別資産の期待超過収益を表現する際に取り入れる共変動の次数は、投資家の効用関数の次数によって決まる。文献 [8] では、4 次の効用関数に対し、 $\kappa_{iM}^{(2)}$ を資産 i の共歪度、 $\kappa_{iM}^{(3)}$ を共尖度とした上で、ベータ、共歪度、共尖度の 3 つのファクターを用いて個別資産の超過収益率を表現している。なお、これらの結果は、文献 [11] における 3 次モーメント CAPM の拡張と捉えることができる。文献 [6, 9] では、ポートフォリオ選択問題におけるオイラー方程式のプライシングカーネル (確率的ディスカウントファクター) を、市場平均ポートフォリオの超過収益率の線形式から高次多項式に拡張することによって、同様の関係を示している。

2.2 共変動を用いた分析の背景と問題点

2 次以上の高次の共変動を導入する背景として、大きく分けて以下の 2 点が挙げられる。1 点目は、文献 [5] で説明されているのだが、資産収益率の正規分布からのかい離の評価指標としてである。すでに多くの文献 (例えば [2, 15]) で指摘されているように、資産収益率分布は非対称性やファットテールをもつなど、正規分布からのかい離が観測される。このような正規分布からのかい離が高次の共変動に反映され、期待超過収益率に影響を与えるというのが、文献 [4, 5] などで述べられている仮説である。

2 点目については、文献 [6, 9] で主に述べられているのだが、プライシングカーネルの非線形性が期待超過収益率に影響を与えるというものである。通常の CAPM においては、プライシングカーネルは市場ポートフォリオの超過収益率に対して線形であり、結果として、個別資産の超過収益率は、1 次の共変動であるベータにのみ依存する形となる。しかし、プライシングカーネルが一般に非線形、すなわち、市場ポートフォリオの超過収益率の多項式として与えられるような場合には、個別資産の超過収益率は高次の共変動に依存することが示されている [6]。いずれのケースも、富の超過収益率に対する高次項を取り入れた期待効用最大化問題の 1 階の条件やプライシングカーネルの展開式から、個別資産の期待超過収益率に対する高次共変動の符号条件を導き、実際のデータを用いて、時系列方向、あるいはクロスセクション方向での高次共変動の有意性を検証するという分析が、主に行われてきている。

共変動を説明変数とする際の問題点について考察するため、個別資産の超過収益率を、CAPM のベータを与える $\kappa_{iM}^{(1)}$ を用いて、以下のように表現する。

$$R_{i,t} = \kappa_{iM}^{(1)} R_{M,t} + \epsilon_{i,t} \quad (2.7)$$

ただし, $\epsilon_{i,t}$ は残差項である. このとき, $C_{iM}^{(k)}$, $k \geq 2$ は, 次式で与えられる.

$$\begin{aligned} C_{iM}^{(k)} &= \text{Cov}\left(R_{i,t}, R_{M,t}^k\right) \\ &= \kappa_{iM}^{(1)} \text{Cov}\left(R_{M,t}, R_{M,t}^k\right) + \text{Cov}\left(\epsilon_{i,t}, R_{M,t}^k\right), \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

(2.8) 式の右辺第 1 項は, クロスセクション方向において, 個別資産のベータ ($= \kappa_{iM}^{(1)}$) にのみ依存する項である. 一方, 第 2 項における $\epsilon_{i,t}$ であるが, 個別資産の超過収益率を市場ポートフォリオの超過収益率で回帰した際の残差であり, $R_{M,t}$ とは無相関である. 全ての資産の超過収益率が正規分布に従う場合において, 無相関は独立であることを示唆し, (2.8) 式の右辺第 2 項は 0 となる. 結果として,

$$\begin{aligned} C_{iM}^{(k)} &= \kappa_{iM}^{(1)} \text{Cov}\left(R_{M,t}, R_{M,t}^k\right) \\ \Leftrightarrow \kappa_{iM}^{(k)} &= \kappa_{iM}^{(1)} \times \frac{\text{Cov}\left(R_{M,t}, R_{M,t}^k\right)}{\mathbb{E}\left[\left\{R_{M,t} - \mathbb{E}\left[R_{M,t}\right]\right\}^{k+1}\right]}, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

が成り立ち, $C_{iM}^{(k)}$ および $\kappa_{iM}^{(k)}$ は個別資産のベータ ($= \kappa_{iM}^{(1)}$) に比例する. さらに, $R_{i,t}$, $R_{M,t}$ が (2.2) 式によって定義されるとすれば,

$$\kappa_{iM}^{(1)} = \kappa_{iM}^{(k)}, \quad k = 2, 3, \dots$$

が成り立つ.

このように, 超過収益率が正規分布に従う場合, 高次共変動はクロスセクション方向でベータとともに変動する. そのため, 個別資産の期待超過収益率を被説明変数, 共変動を説明変数とするクロスセクション回帰分析において, 高次共変動の係数が仮に有意であったとしても, それが正規分布とのかい離によるものであるのか, あるいは, ベータとの連動によるものであるのかを区別することは一般にできない. また, (2.8) 式のように, 高次の共変動は低次の共変動の影響を直接的に受けるため, 異なる次数の共変動を説明変数とすることにおける多重共線性の問題も懸念される. 以上を背景として, 本論文では, I-共変動と呼ぶ新たな指標を導入し, その性質について議論する.

3 I-共変動の導入

3.1 定義

I-共変動は, 以下のように定義される.

定義 1 (I-共変動) $\epsilon_{i,t}^{(0)} := R_{i,t}$ とする. 次式で定義する $\beta_{iM}^{(k)}$ を, k 次の I-共変動と呼ぶ.

$$\beta_{iM}^{(k)} := \frac{\text{Cov}\left(\epsilon_{i,t}^{(k-1)}, R_{M,t}^k\right)}{\text{Var}\left(R_{M,t}^k\right)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1)$$

ただし,

$$\varepsilon_{i,t}^{(k)} := \varepsilon_{i,t}^{(k-1)} - \beta_{iM}^{(k)} R_{M,t}^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2)$$

である.

I-共変動の定義について補足的な説明を加える. まず, $\beta_{iM}^{(1)}$ は個別資産のベータであり, $\beta_{iM}^{(1)} = \kappa_{iM}^{(1)}$ が成り立つ. さらに, $\beta_{iM}^{(1)} R_{M,t}$ は, $R_{M,t}$ の空間に対する $\varepsilon_{i,t}^{(0)} := R_{i,t}$ の直交射影を与え, 残差項 $\varepsilon_{i,t}^{(1)} = R_{i,t} - \beta_{iM}^{(1)} R_{M,t}$ について, $\varepsilon_{i,t}^{(1)} \perp \beta_{iM}^{(1)} R_{M,t}$ が成り立つ³. この $\varepsilon_{i,t}^{(1)}$ を1次残差と呼ぶこととすれば, $\beta_{iM}^{(2)} R_{M,t}^2$ は $R_{M,t}^2$ の空間に対する1次残差の直交射影を与え, 残差項 $\varepsilon_{i,t}^{(2)} = \varepsilon_{i,t}^{(1)} - \beta_{iM}^{(2)} R_{M,t}^2$ は $\varepsilon_{i,t}^{(2)} \perp \beta_{iM}^{(2)} R_{M,t}^2$ を満たす. このように順次定義される $\varepsilon_{i,t}^{(k)}$ を k 次残差と呼べば, k 次の I-共変動 $\beta_{iM}^{(k)}$ は, $R_{M,t}^k$ の空間に対する $\varepsilon_{i,t}^{(k-1)}$ の直交射影によって定義される.

3.2 I-共変動の推定量と分布の形状

つぎに, 多段階回帰を適用した際の I-共変動の推定量とその性質について議論する. ここでは, 時点 $t = 1, 2, \dots, T$ における $R_{i,t}$, $R_{M,t}$ の観測値が与えられるとする⁴. このとき, $R_{i,t}$ の観測値を $R_{M,t}$ の観測値で単回帰した際の回帰係数の最小二乗 (Ordinary Least Squares; OLS) 推定量は, 1 次の I-共変動 $\beta_{iM}^{(1)}$ の推定量を与える. 1 次の I-共変動はベータに等しいので, このことは, ベータの推定量が非零であれば $R_{i,t}$ と $R_{M,t}$ に線形の相関関係が存在することを示す.

一方, 2 次の I-共変動 $\beta_{iM}^{(2)}$ の推定量は, 1 次残差を与える 1 段階目の回帰の残差項 $\varepsilon_{i,t}^{(1)} = R_{i,t} - \beta_{iM}^{(1)} R_{M,t}$ の観測値⁵ に対して, $R_{M,t}^2$ の観測値を説明変数として単回帰した際の OLS 推定量によって与えられる. このような回帰係数は, $(R_{M,t}, \varepsilon_{i,t}^{(1)})$ の観測値を最小二乗近似する 2 次曲線 $y = cx^2 + d$ における x^2 の係数 c の推定量を計算することによって求めることができる. Fig. 3.1 は, 2 次 I-共変動の推定量が非零だった場合における, $R_{M,t}$ の観測値と $\varepsilon_{i,t}^{(1)}$ の観測値の関係を表す概念図である. このように, 2 次 I-共変動 (の推定量) が正の場合, $R_{M,t}$ (の観測値) が正であれば $\varepsilon_{i,t}^{(1)}$ (の観測値) も正となる傾向にあるが, $R_{M,t}$ が負となる場合でも $\varepsilon_{i,t}^{(1)}$ は正となる傾向にあり, $R_{M,t}$ の符号に対して $\varepsilon_{i,t}^{(1)}$ は非対称に反応することが分かる. このことは, 個別資産の超過収益率 $R_{i,t}$ が市場ポートフォリオの超過収益率 $R_{M,t}$ から非対称な影響を受けることを意味し, 結果として, $R_{M,t}$ の分布に対して $R_{i,t}$ の分布は正の方向に歪む. 逆に, 2 次 I-共変動が負のとき, $R_{M,t}$ の分布に対して $R_{i,t}$ の分布は負の方向に歪むものと考えられる.

同様に, 3 次の I-共変動 $\beta_{iM}^{(3)}$ の推定量は, 2 次残差 $\varepsilon_{i,t}^{(2)} = \varepsilon_{i,t}^{(1)} - \beta_{iM}^{(2)} R_{M,t}^2$ の観測値に対して, $R_{M,t}^3$ の観測値を説明変数として単回帰した際の OLS 推定量によって与えられる. このような 3 次 I-共変動の推定量については, Fig. 3.2 に示されるような 3 次関数 $y = cx^3$ の形状から, $\varepsilon_{i,t}^{(2)}$ の分布のより裾野の部分に対する $R_{M,t}$ の影響を反映するものと考えられる. 例えば, $\beta_{iM}^{(3)} > 0$ の推定量が正であれば, $R_{M,t}$

³2 乗可積分な確率変数確率変数 X, Y に対し, $X \perp Y$ は $\mathbb{E}[XY] = 0$ であることを示す.

⁴ここでは, 時点 $t = 1, 2, \dots, T$ における $R_{i,t}$, $R_{M,t}$ の観測値は, それぞれ, 独立かつ同一の分布に従う (すなわち *i.i.d.*) とする.

⁵ただし, $\varepsilon_{i,t}^{(1)}$ の観測値を計算する際は, $\beta_{iM}^{(1)}$ の推定量が用いられる.

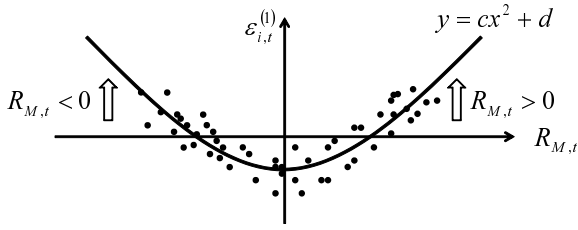


Fig. 3.1: 2次 I-共変動が正の場合の $R_{M,t}$ と $\varepsilon_{i,t}^{(1)}$ の関係

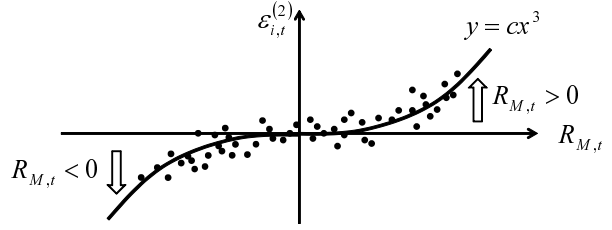


Fig. 3.2: 3次 I-共変動が正の場合の $R_{M,t}$ と $\varepsilon_{i,t}^{(2)}$ の関係

と順方向に $\varepsilon_{i,t}^{(2)}$ が反応し、 $\beta_{iM}^{(3)} < 0$ の推定量が負であれば、 $R_{M,t}$ と逆方向に $\varepsilon_{i,t}^{(2)}$ が反応するのであるが、分布の裾野に行くほどその影響が強くなるものと考えられる。結果として、3次の I-共変動が正である場合、市場ポートフォリオの超過収益率の分布よりも個別資産収益率の分布の裾野は太くなる傾向にあることが分かる。

このように、 $R_{i,t}$, $R_{M,t}$ の観測値が与えられれば、多段階回帰を適用することにより、I-共変動を順次推定することが可能である。また、2次、3次の I-共変動の推定量に対する議論と同様に、より高次の I-共変動についても、個別資産収益率に対する市場ポートフォリオ超過収益率の影響について考察することが可能であるが、 k 次 I-共変動の推定量に関する関数 $y = cx^k$ の形状から、偶数次の I-共変動は市場ポートフォリオ超過収益率からの非対称な影響、奇数次の I-共変動は裾野部分への影響を反映する指標であると考えられる。ただし、 k が大きくなるにつれ、 x^k の絶対値 (ただし $|x| < 1$) は小さくなるため、高次の場合、絶対値の小さい $R_{M,t}$ の変動の影響は観測されにくくなる。結果として、より次数の高い I-共変動の方が、 $R_{M,t}$ の絶対値がより大きな変動部分の個別資産超過収益率への影響を反映するものと考えられる。

3.3 共変動との関係

以下、I-共変動について成り立ついくつかの理論的性質を示す前に、共変動と I-共変動の関係について考察する。まず、I-共変動の定義から、

$$\varepsilon_{i,t}^{(k-1)} = \beta_{iM}^{(k)} R_{M,t}^k + \varepsilon_{i,t}^{(k)}, \quad \varepsilon_{i,t}^{(0)} = R_{i,t} \quad (3.3)$$

であるので、 $R_{i,t}$ は、 m 次までの I-共変動 $\beta_{iM}^{(k)}$, $k = 1, \dots, m$ を用いて次のように表現される。

$$\begin{aligned} R_{i,t} &= \beta_{iM}^{(1)} R_{M,t} + \varepsilon_{i,t}^{(1)} \\ &= \beta_{iM}^{(1)} R_{M,t} + \beta_{iM}^{(2)} R_{M,t}^2 + \varepsilon_{i,t}^{(2)} \\ &= \dots \dots \dots \\ &= \beta_{iM}^{(1)} R_{M,t} + \beta_{iM}^{(2)} R_{M,t}^2 + \dots + \beta_{iM}^{(m-1)} R_{M,t}^{m-1} + \beta_{iM}^{(m)} R_{M,t}^m + \varepsilon_{i,t}^{(m)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

また,

$$\text{Cov} \left(\varepsilon_{i,t}^{(m)}, R_{M,t}^m \right) = 0$$

が成り立つので, (3.4) 式の右辺を m 次の共変動の定義式

$$C_{iM}^{(m)} = \text{Cov} \left(R_{i,t}, R_{M,t}^m \right)$$

に代入すると, 任意の $m \geq 1$ に対して次式が成り立つ.

$$C_{iM}^{(m)} = \beta_{iM}^{(1)} \text{Cov} \left(R_{M,t}, R_{M,t}^m \right) + \cdots + \beta_{iM}^{(m-1)} \text{Cov} \left(R_{M,t}^{m-1}, R_{M,t}^m \right) + \beta_{iM}^{(m)} \text{Var} \left(R_{M,t}^m \right) \quad (3.5)$$

$R_{M,t}$ は全銘柄で共通であるので,

$$\text{Cov} \left(R_{M,t}^k, R_{M,t}^m \right), \quad k = 1, \dots, m$$

の項は, i に依存せず全銘柄で等しい. 結果として, 任意の次数の共変動は, 同次数以下の I-共変動の線形形式として表現されることが分かる.

さらに, (3.5) 式を用いて, 1 次共変動から m 次共変動まで書き表すと,

$$\begin{aligned} C_{iM}^{(1)} &= \beta_{iM}^{(1)} \text{Var} \left(R_{M,t} \right) \\ C_{iM}^{(2)} &= \beta_{iM}^{(1)} \text{Cov} \left(R_{M,t}, R_{M,t}^2 \right) + \beta_{iM}^{(2)} \text{Var} \left(R_{M,t}^2 \right) \\ C_{iM}^{(k)} &= \beta_{iM}^{(1)} \text{Cov} \left(R_{M,t}, R_{M,t}^k \right) + \cdots + \beta_{iM}^{(k-1)} \text{Cov} \left(R_{M,t}^{k-1}, R_{M,t}^k \right) + \beta_{iM}^{(k)} \text{Var} \left(R_{M,t}^k \right), \quad k = 3, \dots, m \end{aligned}$$

であるので, $[k, l]$ -成分 ($k = 1, \dots, m$) が,

$$L_M[k, l] = \begin{cases} \text{Cov} \left(R_{M,t}^k, R_{M,t}^l \right) & (l = 1, \dots, k) \\ 0 & (l = k + 1, \dots, m) \end{cases} \quad (3.6)$$

のように与えられる下三角行列 $L_M \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ に対し, 以下の関係が成り立つ.

$$\begin{bmatrix} C_{iM}^{(1)} \\ C_{iM}^{(2)} \\ \vdots \\ C_{iM}^{(m)} \end{bmatrix} = L_M \begin{bmatrix} \beta_{iM}^{(1)} \\ \beta_{iM}^{(2)} \\ \vdots \\ \beta_{iM}^{(m)} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \beta_{iM}^{(1)} \\ \beta_{iM}^{(2)} \\ \vdots \\ \beta_{iM}^{(m)} \end{bmatrix} = L_M^{-1} \begin{bmatrix} C_{iM}^{(1)} \\ C_{iM}^{(2)} \\ \vdots \\ C_{iM}^{(m)} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

下三角行列の逆行列は下三角行列であるので, (3.7) 式は, 任意の次数の I-共変動が, 同次数以下の共変動の線形結合として表現されることを意味する. また, 付録 A に示すように, 標準的回帰モデルと同様の仮定 (例えば [1]) の下, (3.7) 式の関係を用いて I-共変動の標準誤差を導出することができる.

4 I-共変動の理論的性質

前節では, I-共変動の定義を導入した上で, I-共変動の推定量と分布の形状との関係, および, I-共変動が同次数以下の共変動の線形結合として表現されることを示した. 本節では, I-共変動のもつさらなる性質について考察する.

4.1 正規性からのかい離指標としての性質

まず、全ての資産収益率が正規分布に従う際に成立する I-共変動のもつ性質を、以下に定理として示す。

定理 1 全ての資産収益率が正規分布に従えば、高次 (2 次以上) の I-共変動は全て 0 である。すなわち、

$$\beta_{iM}^{(k)} = 0, \quad k \geq 2 \quad (4.1)$$

が成り立つ。

証明: $R_{i,t}$, $i = 1, \dots, n$, および $R_{M,t}$ は正規分布に従うとする。このとき、

$$\varepsilon_{i,t}^{(1)} = R_{i,t} - \beta_{iM}^{(1)} R_{M,t}$$

は $R_{M,t}$ と独立であるので⁶、

$$\text{Cov} \left(\varepsilon_{i,t}^{(1)}, R_{M,t}^2 \right) = 0 \quad (4.2)$$

を得る。よって、

$$\beta_{iM}^{(2)} = 0, \quad \varepsilon_{i,t}^{(2)} = \varepsilon_{i,t}^{(1)} - \beta_{iM}^{(2)} R_{M,t}^2 = \varepsilon_{i,t}^{(1)}$$

であるが、独立性より、

$$\text{Cov} \left(\varepsilon_{i,t}^{(2)}, R_{M,t}^3 \right) = \text{Cov} \left(\varepsilon_{i,t}^{(1)}, R_{M,t}^3 \right) = 0 \quad (4.3)$$

が成り立ち、 $\beta_{iM}^{(3)} = 0$ が得られる。同様にして、 $k \geq 4$ に対しても、

$$\text{Cov} \left(\varepsilon_{i,t}^{(k-1)}, R_{M,t}^k \right) = \text{Cov} \left(\varepsilon_{i,t}^{(1)}, R_{M,t}^k \right) = 0 \quad (4.4)$$

が示され、結果として、(4.1) 式が成立する。 ■

定理 1 の対偶をとれば、高次の I-共変動に非零のものが存在すれば、資産収益率に正規分布に従わないものが存在することとなり、結果として市場ユニバースが非正規性をもつことを意味する。また、非零の高次 I-共変動が有意である銘柄の割合が高ければ、それだけ市場ユニバース全体が正規分布からかい離していることが想定される。

4.2 I-共変動の加重平均

つぎに、市場ポートフォリオの個別資産の重みに対する I-共変動の加重平均が満たす条件を示す。市場ポートフォリオの個別資産 $i = 1, \dots, n$ に対する重みを w_i とすると、 w_i は、

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

⁶ $\varepsilon_{i,t}^{(1)}$ は $R_{M,t}$ と無相関であり、かつ正規確率変数の場合、無相関であれば独立である。

を満たす．このとき，個別資産のベータの重み付け和 (加重平均) は市場平均ポートフォリオのベータに一致するので，1 次の I-共変動について次式が成り立つ．

$$\sum_{i=1}^n w_i \beta_{iM}^{(1)} = 1 \quad (4.5)$$

さらに，(3.3) 式において， $k = 1$ ， $\varepsilon_{i,t}^{(0)} = R_{i,t}$ としたものに対し，両辺加重平均をとると，

$$\sum_{i=1}^n w_i R_{i,t} = \sum_{i=1}^n w_i \beta_{iM}^{(1)} R_{M,t} + \sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_{i,t}^{(1)} \quad (4.6)$$

であるが，(4.6) 式の左辺は市場ポートフォリオの超過収益率 $R_{M,t}$ を与えるので，(4.5) 式より，

$$R_{M,t} = R_{M,t} + \sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_{i,t}^{(1)}$$

が成り立つ．結果として，

$$\sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_{i,t}^{(1)} = 0 \quad (4.7)$$

を得る．また， $\beta_{iM}^{(2)}$ の加重平均について，

$$\sum_{i=1}^n w_i \beta_{iM}^{(2)} = \text{Cov} \left(\sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_{i,t}^{(1)}, R_{M,t}^2 \right) \frac{1}{\text{Var} \left(R_{M,t}^2 \right)} \quad (4.8)$$

であるが，(4.7) 式より，(4.8) 式の右辺は 0，すなわち，

$$\sum_{i=1}^n w_i \beta_{iM}^{(2)} = 0 \quad (4.9)$$

が成り立つ．以上の議論を一般化すると，次の定理を得る．

定理 2 高次の I-共変動，および残差項について，以下の関係が成り立つ．

$$\sum_{i=1}^n w_i \beta_{iM}^{(k)} = 0 \quad (k \geq 2) \quad (4.10)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_{i,t}^{(k)} = 0 \quad (k \geq 1) \quad (4.11)$$

証明: $k \geq 2$ に対し，

$$\sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_{i,t}^{(k-1)} = 0, \quad \sum_{i=1}^n w_i \beta_{iM}^{(k)} = 0 \quad (4.12)$$

とする．このとき，(3.3) 式の両辺加重平均をとると，

$$\sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_{i,t}^{(k-1)} = \sum_{i=1}^n w_i \beta_{iM}^{(k)} R_{M,t}^k + \sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_{i,t}^{(k)} \quad (4.13)$$

であるので，

$$\sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_{i,t}^{(k)} = 0 \quad (4.14)$$

を得る．さらに，(4.8) 式と同様に， $\beta_{iM}^{(k+1)}$ の加重平均を計算すると，

$$\sum_{i=1}^n w_i \beta_{iM}^{(k+1)} = \text{Cov} \left(\sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_{i,t}^{(k)}, R_{M,t}^{k+1} \right) \frac{1}{\text{Var} \left(R_{M,t}^{k+1} \right)} = 0 \quad (4.15)$$

である．よって，(4.7), (4.9) 式を初期条件とする数学的帰納法より，(4.10), (4.11) 式が成り立つ． ■

I-共変動の加重平均を市場の平均と見なせば，定理 2 より，2 次以上の I-共変動の市場平均は 0 であるので，I-共変動の符号や絶対値の大きさから，個別資産の市場平均に対する相対的な評価が可能であることが分かる．さらに，クロスセクション方向の分析を考えた場合，加重平均が 0 であるとは，重みで測度変換した確率測度上で期待値が 0 となることを意味し，クロスセクションでの I-共変動の分布における分散（標準偏差）などの統計量や I-共変動の有意比率⁷は，市場全体における正規分布からのかい離を測る評価指標を与える．以上を念頭に，次節では，日本市場における I-共変動の有意性について検証する．

4.3 I-共変動を考慮したポートフォリオについて

市場ポートフォリオとベータが一致するように個別資産のポートフォリオ重みを算出するための制約を「ベータ・ニュートラル制約」と呼ぶことがあるが，ベータ・ニュートラル制約の下，超過アルファを獲得するようなポートフォリオはいわゆる“アクティブ・リターン”をもたらすものと考えられる．一方，このようなポートフォリオは許容する市場リスクとしてベンチマークとなる市場ポートフォリオと同程度のベータ・リスクを想定することになるが，ベータ・リスクとは市場ポートフォリオとの線形的な連動性に起因するものであり，市場ポートフォリオ超過収益率との非対称な連動性のリスク，あるいは個別資産超過収益率に対する裾野への影響のリスクは必ずしも考慮されていない．

一方，(3.4) 式より，ポートフォリオの I-共変動は，ベータと同様，個別資産の I-共変動を資産配分重みで加重平均したもので与えられる．また，市場ポートフォリオの 2 次以上の I-共変動は 0 であるので，ベータ・ニュートラル制約の他に，「スキュー・ニュートラル制約」あるいは「テール・ニュートラル制約」として，2 次，あるいは 3 次の I-共変動の加重平均が 0 であるという制約を付加すれば，ベータ・ニュートラル制約だけでは考慮されなかった非対称性リスク，あるいは裾野への影響リスクを低減化できることが期待される．

本論文の位置づけとしては，このような I-共変動に関する制約を取り入れたポートフォリオ最適化やリスク管理手法について検討する前段階として，実際に日本市場で I-共変動が有意に観測されるかを検

⁷本論文では，市場ユニバースにおける全銘柄に対して，I-共変動がプラス，あるいはマイナス方向で有意と判定された銘柄の割合を有意比率として定義する．

証することにある。I-共変動を考慮したポートフォリオ最適化やアクティブ・リターンとの関係、また、リスク管理への適用法については、今後の課題としたい。

5 日本市場における I-共変動の有意性実証分析

本論文では、東証 1 部に上場している金融業を除いた銘柄に対し⁸、分析サイクルを日次とした上で、日経 NEEDS-FinancialQUEST で株式価格の日次収益率データが取得可能な 1978 年 10 月 3 日を分析全期間の起点、2012 年 3 月 30 日を最終時点に設定する⁹。ただし、データ観測期間を一定以上確保するため、全期間を対象とする分析では、2012 年 3 月 30 日時点で過去 10 年以上上場している 1,084 銘柄を分析対象とする。また、個別資産の超過収益率 $R_{i,t}$ 、市場ポートフォリオの超過収益率 $R_{M,t}$ は、それぞれ (2.1) 式に基づき、個別銘柄の日次収益率、あるいは分析対象全銘柄の収益率の時価総額加重平均から無リスク利率を差し引くことにより計算するものとする¹⁰。

5.1 全期間を対象とした分析

Table 5.1 は、全期間における分析対象 1,084 銘柄に対して I-共変動を 6 次まで推定した結果の要約である。Table 5.1 の第 1 段目は、 $\beta_{iM}^{(i)}$, $i = 1, \dots, 6$ の推計値および t 値の、クロスセクションにおける平均・標準偏差を示す。また、第 2 段目は、回帰係数を 0 とした片側 t 検定において、有意水準 5% で有意と判定された銘柄数の全対象銘柄数に対する割合 (有意比率) を、プラス・マイナス方向でそれぞれ計算したものである¹¹。

Table 5.1 に示す結果から、まず、2 次の I-共変動については、マイナス方向の有意性が高く、3 次の I-共変動についてはプラス方向で有意性が高いことが分かる。また、有意と判定される銘柄の割合 (プラス・マイナス有意比率の和) も、2 次で全体の約 50%、3 次で全体の約 65% と、個別銘柄に対する市場ポートフォリオの非対称な影響、および裾野部分の影響が多くの銘柄で観測されている。また、4 次までは全体の 25% 強が有意と判定されるが、5、6 次については、有意と判定される銘柄の割合が数% 以下と大きく低下することも見て取れる。なお、付録 B の Table B.2 に示すように、10 次までの I-共変動についても同様に有意比率を計算したが、有意性は低下したままであった。

⁸分析期間前月末時点の東証 33 業種分類に基づき、銀行業、証券・先物取引業、保険業、その他金融業の 4 業種を金融業と表す。

⁹<http://www.nikkei.co.jp/needs/services/fq.html> 参照。なお、株式価格データは 1978 年 10 月 2 日を起点とする当日の調整済み終値を使用しているが、データ期間は日次収益率が実現される時点を基準とするため、1978 年 10 月 3 日を分析全期間の起点としている。

¹⁰有担保コールローン翌日物を日次換算した値を無リスク利率とする。なお、超過収益率の定義に (2.2) 式を採用した分析も実施したが、結果に差異は見られなかったため、本分析では (2.1) 式を用いた結果のみ掲載している。また、時価総額から計算される重みは、本来、時点とともに変化するものであるが、重みが時点に依存する場合は、期待値や分散・共分散を、それぞれ、条件付き期待値、条件付き分散・共分散に置き換えることで、本論文と同様の議論が可能である。

¹¹I-共変動の推定には、第 3.2 節で示した多段階回帰を用いる。また、I-共変動の推計値や t 値のクロスセクションにおける中央値・最大値・最小値・歪度・尖度・上下 $x\%$ 点を除く平均と片側 1%、片側 10% の有意比率は、付録 B Table B.1 に掲載。

Table 5.1: $\beta_{iM}^{(k)}$ の推定結果 (要約) と片側 5% の t 検定における有意比率

| 次数 | $k = 1$ | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ | $k = 6$ |
|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| 推計値平均 | 0.844 | -0.567 | 10.876 | 19.573 | 39.282 | 272.637 |
| 推計値標準偏差 | 0.231 | 1.097 | 13.505 | 61.725 | 237.826 | 1517.070 |
| t 値平均 | 40.422 | -1.055 | 2.073 | 0.462 | 0.066 | 0.129 |
| t 値標準偏差 | 13.228 | 2.081 | 2.429 | 1.380 | 0.640 | 0.564 |
| プラス有意比率 (%) | 100.000 | 9.686 | 59.317 | 20.572 | 1.107 | 0.369 |
| マイナス有意比率 (%) | 0.000 | 40.129 | 6.642 | 5.812 | 0.092 | 0.185 |

5.2 期間別分析

つぎに、分析期間を以下の期間 1-4 に 4 等分し、期間ごとの I-共変動有意比率を計算する¹²。

- 1: 1978/10/3-1986/4/22, 2: 1986/4/23-1994/9/21
 3: 1994/9/22-2003/6/19, 4: 2003/6/20-2012/3/30

Fig. 5.1 は、それぞれの期間における I-共変動の有意比率を示す。ただし、横軸は、I-共変動の次数、縦軸はプラス、あるいはマイナスの有意比率を表す。全期間の場合と同様に、2 次、3 次の I-共変動の有意比率が相対的に高く、5 次以上の I-共変動の有意比率は数パーセント以下と低いことが分かる。また、期間 1 においては、2 次の I-共変動はマイナス有意比率がプラスを大きく上回っているが、4 次の I-共変動はプラス有意比率がマイナス有意比率を大きく上回っている。4 次の I-共変動も 2 次の I-共変動と同様に、市場ポートフォリオの超過収益率に対する個別資産の超過収益率の非対称な影響を表しているが、2 次関数 $y = cx^2$ の外側に 4 次関数 $y = cx^4$ が位置することに注意すると、4 次の I-共変動はより分布のテール方向の非対称性を反映するものと考えられる。

Fig. 5.2 は、2 次、あるいは 3 次の I-共変動に対して、各期間 (1-4) の有意比率を表示したものである。期間 2 はバブル期 (および崩壊期)、期間 4 は直近の金融危機を含む期間であるが、期間 2 では 2 次 I-共変動のマイナス有意比率が突出して高く、期間 4 では 3 次 I-共変動のプラス有意比率が他に比べて高いことが分かる。

各期間をさらに 2 分割することによって、全期間を以下のように 8 分割した結果を Fig. 5.3 に示す。

- 1: 1978/10/3-1982/7/13, 2: 1982/7/14-1986/4/22, 3: 1986/4/23-1990/5/15, 4: 1990/5/16-1994/9/21
 5: 1994/9/22-1999/2/3, 6: 1999/2/4-2003/6/19, 7: 2003/6/20-2007/11/2, 8: 2007/11/5-2012/3/30

Fig. 5.3 における右図の 3 次 I-共変動有意比率については、サブプライムローン問題が表面化した 2007 年夏以降の期間 8 においてプラス有意比率が突出しており、昨今の金融危機に強く反応していることが

¹² 期間を 4 分割した分析においては、分析期間最終日から遡り、過去 4 年以上、上場している銘柄を分析対象とした。対象銘柄数は、期間 1 から順に、855, 1018, 1098, 1449 である。

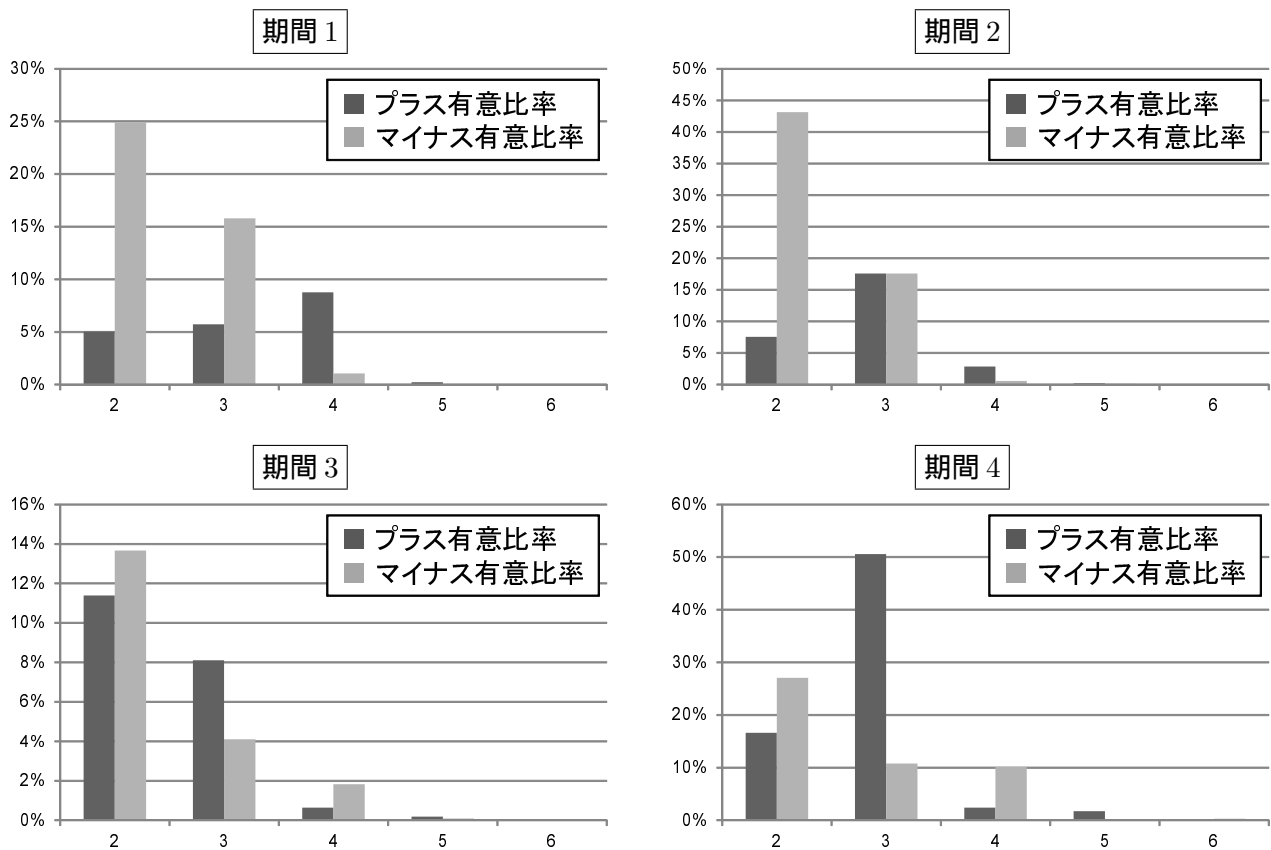


Fig. 5.1: 全期間を4期間に分割した際のI-共変動の次数(横軸: 2-6次)と有意比率の関係

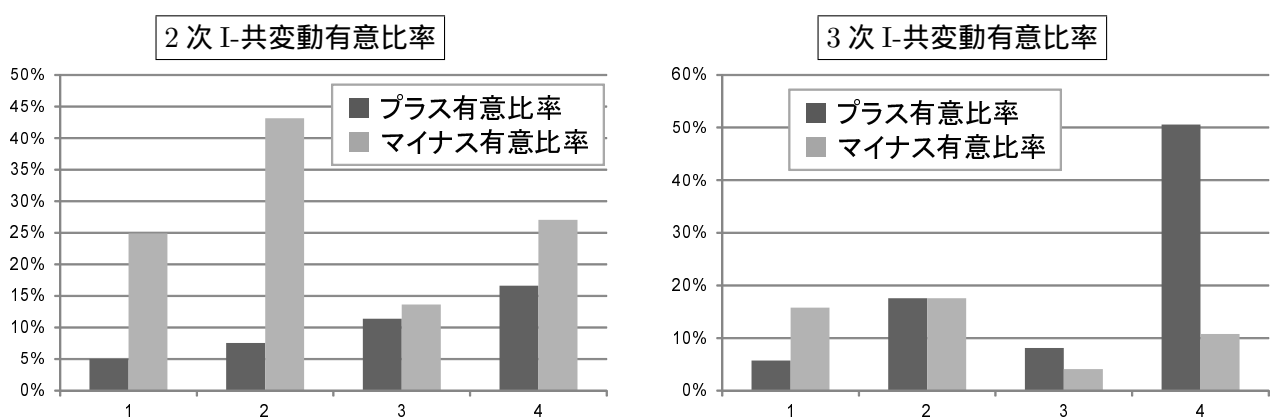


Fig. 5.2: 全期間を4分割した際の期間1-4(横軸)に対する有意比率

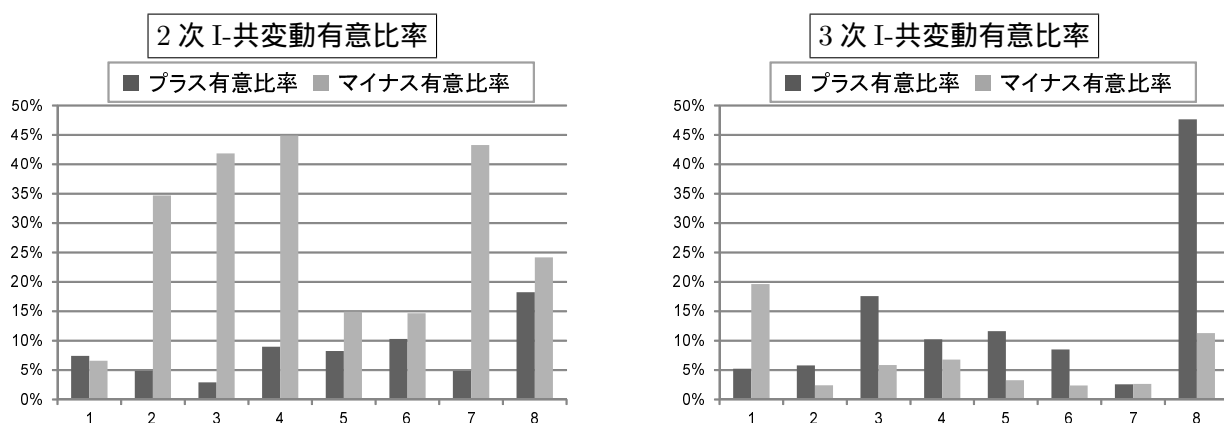


Fig. 5.3: 全期間を8分割した際の期間1-8 (横軸) に対する有意比率

分かる。一方、左図の2次 I-共変動有意比率については、マイナスの有意比率が期間3-4と期間7において高い。期間3と期間7はともに、日経平均が上昇し続けた期間とほぼ一致しているが、両期間とも、分析期間の直後にバブルの崩壊、あるいは、金融危機が表面化する期間でもあり、当該時期における市場の歪みの影響が2次 I-共変動の有意比率に反映されていることが伺える。

5.3 属性別分析

最後に、分析対象を時価総額の大小、あるいは簿価・時価比率(B/P)の大小で層別した際の分析結果を示す。ここでは、分析期間における時価総額、あるいはB/Pの月末時点の値(月末値)を、個別銘柄ごとに計算した上で分析期間における期間平均を求め、期間平均値が低い順に対象全銘柄を5分割し(第1-5分位)、各分位に対して層別分析を行う。

Fig. 5.4は、全期間を分析対象期間として時価総額で5分割した場合の、第1分位から第5分位の銘柄群に対して、それぞれ2次、3次のI-共変動を推定し、時価総額が低い順に左から5%水準の有意比率を示したものである。まず、2次 I-共変動については、時価総額が低い分位の方がマイナス有意比率が高く、時価総額の高い分位の方がプラス有意比率が高くなる傾向にあることが分かる。一方、3次 I-共変動については、逆の傾向にあり、時価総額の低い銘柄ほどプラス有意比率が高く、時価総額が高くなるにつれ、プラス有意比率は低下し、マイナス有意比率が上昇する。ただし、3次 I-共変動のプラス有意比率は、全ての分位において、相対的にマイナス有意比率を大きく上回っている。

Fig. 5.5は、B/P比率の低い順に第1分位から第5分位で分割した銘柄群について、同じく5%水準の2次あるいは3次のI-共変動有意比率を計算したものである。分析結果から、B/P比率が高いほど2次 I-共変動のマイナス有意比率、および3次 I-共変動のプラス有意比率がともに上昇することが分かる。一方、2次 I-共変動のプラス有意比率については顕著な特徴はみられないものの、3次 I-共変動のマイナス有意比率は、B/P比率が低いほど上昇している。

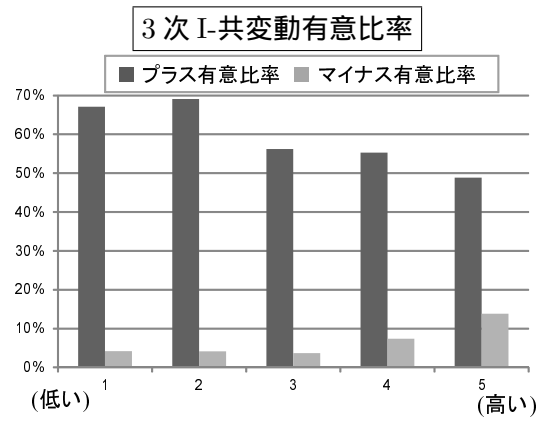
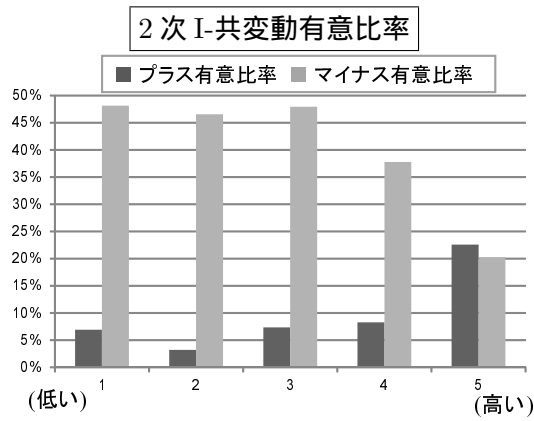


Fig. 5.4: 時価総額別有意比率 (左から第 1 分位, 第 2 分位, ..., 第 5 分位の順)

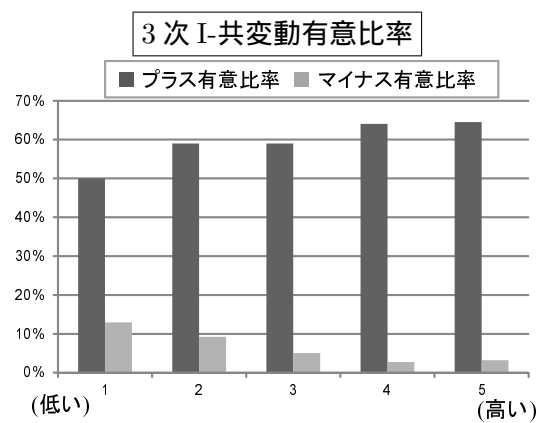
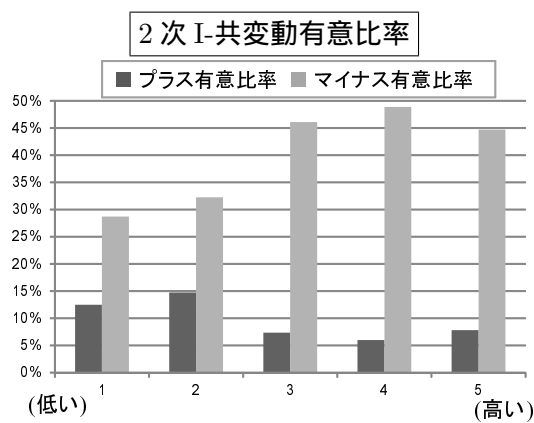


Fig. 5.5: B/P 比率別有意比率 (左から第 1 分位, 第 2 分位, ..., 第 5 分位の順)

6 おわりに

本論文では、I-共変動と呼ぶ新たなリスク評価指標を提案し、その性質について議論した。まず、I-共変動を、市場ポートフォリオ超過収益率の累乗の空間に対する個別資産超過収益率（あるいは前段階回帰の残差項）の直交射影を与える回帰係数によって定義し、2次のI-共変動は市場ユニバースにおける個別資産収益率の分布の歪み、3次のI-共変動は裾野の特性に関係することを述べた。つぎに、全ての資産収益率が正規分布に従う際に、2次以上のI-共変動は全て0となること、および、2次以上のI-共変動は、市場ポートフォリオの重みで加重平均すれば零になるという基準化条件を満たすことを示した。

I-共変動がもつこれらの性質を踏まえ、本論文では分析対象全銘柄に対するI-共変動が有意な銘柄の割合をI-共変動の有意比率と定義し、東証1部上場銘柄におけるI-共変動の有意性、および期間別あるいは属性別の特徴について検証した。全期間を対象とした分析では、2次のI-共変動はマイナス方向の有意性が高く、3次のI-共変動についてはプラス方向で有意性が高いことが検出された。具体的には、5%水準で有意と判定される銘柄の割合（プラス・マイナス有意比率の和）は2次で全体の約50%、3次で全体の約65%と、個別銘柄に対する市場ポートフォリオの非対称な影響、および裾野部分の影響が多くの銘柄で観測された。また、4次までのI-共変動は全体の25%以上が有意と判定されたが、5次以上については数%以下と大きく低下した。

期間別の分析では、3次I-共変動のプラス有意比率が直近の金融危機において強く反応した一方、2次のI-共変動は、日経平均が上昇し続けた期間、あるいはバブル崩壊期などの急激な下落を伴う期間にマイナス有意比率が高くなる傾向が見られた。さらに、属性別の分析では、2次I-共変動については、時価総額が低い分位の方がマイナス有意比率が高く、時価総額の高い分位の方がプラス有意比率が高くなる傾向にある一方、3次I-共変動については、時価総額の低い銘柄ほどプラス有意比率が高くなった。B/P比率の低い順に分割した場合には、B/P比率が高いほど2次I-共変動のマイナス有意比率、および3次I-共変動のプラス有意比率がともに上昇し、3次I-共変動のマイナス有意比率は、B/P比率が低いほど上昇するという結果が得られた。

このように、本分析においては、日本市場において2次、および3次のI-共変動が有意に観測されること、および、期間別、あるいは属性別における特性がI-共変動に反映されることが分かった。今後の課題としては、Fama-Frenchの3ファクターモデルとの比較を含む、クロスセクションにおけるI-共変動のリスクプレミアムに与える影響分析が挙げられる。また、第4.3節で述べたように、I-共変動を考慮したポートフォリオ最適化やアクティブリターンとの関係、また、リスク管理への適用についても、今後の課題として検討したい。

参考文献

- [1] 浅野, 中村, “計量経済学,” 第2版, 有斐閣, 2009.
- [2] J-P. Bouchaud and M. Potters, *Theory of Financial Risks*, Cambridge University Press, 2000.

- [3] M.M. Carhart, “On persistence in mutual fund performance,” *Journal of Finance*, 52(1), 57–82, 1997.
- [4] R. Christie-David and M. Chaudhry, “Coskewness and cokurtosis in futures markets,” *Journal of Empirical Finance* 8, 55-81, 2001.
- [5] Y.P. Chung, H. Johnson and M. Schill, “Asset pricing when returns are nonnormal: Fama-French factors vs. higher-order systematic comoments,” *Journal of Business*, 79(2):923–940, 2006.
- [6] R.F. Dittmar, “Nonlinear pricing kernels, kurtosis preference, and evidence from the cross-section of equity returns,” *Journal of Finance* 51, 369–403, 2002.
- [7] E.F. Fama and K.R. French, “Common risk factors in the returns on stocks and bonds,” *Journal of Financial Economics*, 33(1), 3–56, 1993.
- [8] H. Fang and T.-Y. Lai, “Co-kurtosis and capital asset pricing,” *Financial Review* 32, 293–307, 1997.
- [9] C. Harvey and A. Siddique, “Conditional skewness in asset pricing tests,” *Journal of Finance* 55, 1263–1295, 2000.
- [10] 児玉, 須田, “システム制御のためのマトリクス理論,” 第 2 版, (社) 計測自動制御学会, 1992.
- [11] A. Kraus and R. Litzenberger, “Skewness preference and the valuation of risk assets,” *Journal of Finance* 31, 1085–1100, 1976.
- [12] 久保田, 竹原, “Fama-French ファクターモデルの有効性の再検討,” *現代ファイナンス*, 22, 3–23, 2007.
- [13] J. Lintner, “The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets,” *Review of Economics and Statistics*, 13–37, 1965.
- [14] Y. Malevergne and D. Sornette, *Extreme Financial Risks: From Dependence to Risk Management*, Springer, 2006.
- [15] B.B. Mandelbrot, *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentrations, Risk*, Springer, New York, 1997.
- [16] L. Pastor and R.F. Stambaugh, “Liquidity risk and expected stock returns,” *Journal of Political Economy*, 111(3), 642–685, 2003.

- [17] W. Sharpe, “Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk,” *Journal of Finance* 19, 425–442, 1964.
- [18] 竹原, “コントラリアン戦略, 流動性リスクと期待リターン: 市場効率性の再検証,” 『ファイナンス・テクノロジーの過去・現在・未来』, 三菱 UFJ トラスト投資工学研究所, 407–430, 2008.

付録

A 多項式回帰係数と I-共変動との関係

CAPM におけるベータは, 個別資産の超過収益率を市場ポートフォリオの超過収益率で単回帰した際の回帰係数を与えている. 高次の共変動に対しても同様に, 個別資産の超過収益率を市場ポートフォリオの超過とが収益率の累乗で多重回帰した, 次式のような多項式回帰モデルを対応させることができる.

$$R_{i,t} = b_1 R_{M,t} + b_2 R_{M,t}^2 + \cdots + b_m R_{M,t}^m + \epsilon_{i,t} \quad (\text{A.1})$$

ただし, $\epsilon_{i,t}$ は残差項であり, m は任意に与えられた多項式回帰モデルの次数である. 本付録では, 多項式回帰モデルにおける回帰係数の推定値と共変動, および I-共変動の関係を示し, さらに標準回帰モデルの仮定 (例えば [1]) の下, I-共変動の標準誤差を計算する.

(A.1) 式に対して直交条件

$$(b_1 R_{M,t} + b_2 R_{M,t}^2 + \cdots + b_m R_{M,t}^m) \perp \epsilon_{i,t}$$

を当てはめると, 直交射影を与える回帰係数 b_k^* , $k = 1, \dots, m$ について, 次式が成り立つ.

$$\begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{bmatrix} = \Sigma_M^{-1} \begin{bmatrix} C_{iM}^{(1)} \\ C_{iM}^{(2)} \\ \vdots \\ C_{iM}^{(m)} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^m \quad (\text{A.2})$$

ただし, $\Sigma_M \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ は, $[k, l]$ -成分が以下のように与えられる $R_{M,t}, \dots, R_{M,t}^m$ の共分散行列である.

$$\Sigma_M[k, l] = \text{Cov} \left(R_{M,t}^k, R_{M,t}^l \right), \quad k, l = 1, \dots, m \quad (\text{A.3})$$

時点 $t = 1, 2, \dots, T$ における $R_{i,t}, R_{M,t}$ の観測値に対し, b_k^* ($k = 1, \dots, m$) の標本推定量を \hat{b}_k , \hat{b}_k を第 k 成分とする回帰係数の標本推定量ベクトルを $\hat{\mathbf{b}} \in \mathfrak{R}^m$ とする. このとき, $\hat{\mathbf{b}} \in \mathfrak{R}^m$ は次式のように記述される.

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}, \quad \mathbf{X} \in \mathfrak{R}^{T \times m}, \quad \mathbf{Y} \in \mathfrak{R}^T \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{X}[t, k] := R_{M,t}^k - \overline{R_{M,t}^k}, \quad \mathbf{Y}[t] := R_{i,t}^k, \quad t = 1, \dots, T, \quad k = 1, \dots, m$$

ただし, $\overline{R_{M,t}^k}$ は, $R_{M,t}^k$ の標本平均を表す. また, ここでは,

$$\hat{\Sigma}_M := \mathbf{X}^\top \mathbf{X} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$$

とおく.

回帰残差 $\epsilon_{i,t}$ について, 標準回帰モデル (例えば [1]) における均一分散条件, および無相関条件,

$$\text{Var}[\epsilon_{i,t}] = \sigma_i^2, \quad \text{Cov}[\epsilon_{i,t}, \epsilon_{i,s}] = 0 \quad (t, s = 1, \dots, T, t \neq s)$$

を適用すると,

$$\mathbb{V}(\mathbf{Y}) = \mathbb{V}(\mathbf{e}) = \sigma_i^2 \mathbf{I} \in \mathfrak{R}^{T \times T} \quad (\text{A.5})$$

である. ただし, $\mathbf{e} \in \mathfrak{R}^T$ は, 第 t 要素が $\epsilon_{i,t}$ で与えられるベクトルであり, $\mathbb{V}(\mathbf{Y}), \mathbb{V}(\mathbf{e})$ は, それぞれ, \mathbf{Y}, \mathbf{e} の共分散行列を表す. このとき, $\hat{\mathbf{b}}$ の共分散行列 $\mathbb{V}(\hat{\mathbf{b}})$ は以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\hat{\mathbf{b}}) &= \sigma_i^2 (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \\ &= \sigma_i^2 \hat{\Sigma}_M^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

さらに, (3.7) 式において, L_M が共分散行列 Σ_M と対角成分以下は等しい下三角行列であることに注意すると, 時点 $t = 1, 2, \dots, T$ における $R_{i,t}, R_{M,t}$ の観測値が与えられた場合の, k 次の I-共変動 $\beta_{iM}^{(k)}$ の標本推定値を第 k 成分にもつベクトル $\hat{\beta} \in \mathfrak{R}^m$ について, 次式が成り立つ.

$$\hat{\beta} = \hat{L}_M^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y} \in \mathfrak{R}^m \quad (\text{A.7})$$

ただし, $\hat{L}_M \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ は, $\hat{\Sigma}_M$ の対角要素以下の成分をもつ下三角行列であり, $\hat{\Sigma}_M$ の (i, j) -成分を

$$\hat{\Sigma}_M[i, j] = S_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, m)$$

とすれば¹³,

$$\hat{L}_M = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ S_{1m} & S_{2m} & \cdots & S_{(m-1)m} & S_{mm} \end{bmatrix}$$

のように表現される. このとき, \mathbf{Y} の分散, 共分散について, (A.6) 式を導出した際と同様の標準回帰モデルの仮定が成り立つとすると, $\hat{\beta} \in \mathfrak{R}^m$ の共分散行列は次式を満たす.

$$\mathbb{V}(\hat{\beta}) = \sigma_i^2 \hat{L}_M^{-1} \hat{\Sigma}_M \hat{L}_M^{-\top} \quad (\text{A.8})$$

¹³ $\hat{\Sigma}_M$ は対称行列であるので, $S_{ji} = S_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, m)$ が成り立つことに注意する.

ここで, $\hat{\mathbf{b}}, \hat{\beta}$ の共分散行列を, それぞれ,

$$V_b = \mathbb{V}(\hat{\mathbf{b}}), \quad V_\beta = \mathbb{V}(\hat{\beta})$$

のように表記する. このとき, V_b の (k, k) -成分は \hat{b}_k の分散を与え,

$$V_b[k, k] = \frac{\sigma_i^2}{S_{kk}} \times \text{VIF}_k, \quad k = 1, \dots, m \quad (\text{A.9})$$

が成り立つ. ただし, VIF_k は, 回帰式 (A.1) における k 番目の説明変数に対する VIF (Variance Inflation Factor; 分散拡大要因) である. VIF とは, 回帰係数の分散が当該説明変数のみで単回帰した場合の分散に対してどれだけ増幅されるかを表す指標であり, 標準回帰モデルにおける仮定の下, VIF_k は次のように与えられることが知られている [1].

$$\text{VIF}_k = \frac{1}{1 - \hat{R}_k^2}, \quad k = 1, \dots, m \quad (\text{A.10})$$

ただし, \hat{R}_k^2 は, k 番目の説明変数を, それ以外の説明変数で回帰した際の決定係数である. $0 \leq \hat{R}_k^2 \leq 1$ より, $\text{VIF}_k \geq 1$ であることに注意すると,

$$V_b[k, k] \geq \frac{\sigma_i^2}{S_{kk}} \quad (\text{A.11})$$

が成り立つ.

一方, k 次の I-共変動の分散を与える $V_\beta[k, k]$ について, 以下の命題が成立することを示すことができる.

命題 1 k 次の I-共変動の分散 $V_\beta[k, k]$ について, 次式が成り立つ.

$$V_\beta[k, k] \leq \frac{\sigma_i^2}{S_{kk}}, \quad k = 1, \dots, m \quad (\text{A.12})$$

証明: ここでは, $k = m$ の場合について, (A.12) 式が成り立つことを示す. ただし, $k = 1, \dots, m-1$ の場合も同様である.

まず, $\hat{\Sigma}_M, \hat{L}_M$ を以下のように分解して表記する.

$$\hat{\Sigma}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{m-1} & \mathbf{s} \\ \mathbf{s}^\top & S_{mm} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_{m-1} \in \mathfrak{R}^{(m-1) \times (m-1)}, \quad \mathbf{s} \in \mathfrak{R}^{(m-1)} \quad (\text{A.13})$$

$$\hat{L}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{m-1} & 0 \\ \mathbf{s}^\top & S_{mm} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_{m-1} \in \mathfrak{R}^{(m-1) \times (m-1)} \quad (\text{A.14})$$

このとき，逆行列の公式¹⁴より，

$$\hat{L}_M^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{m-1}^{-1} & 0 \\ -S_{mm}^{-1} \mathbf{s}^\top \mathbf{L}_{m-1}^{-1} & S_{mm}^{-1} \end{bmatrix}$$

であることに注意すると，

$$\hat{L}_M^{-1} \hat{\Sigma}_M \hat{L}_M^{-\top} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{m-1}^{-1} \mathbf{S}_{m-1} \mathbf{L}_{m-1}^{-\top} & * \\ * & S_{mm}^{-1} \mathbf{s}^\top \mathbf{L}_{m-1}^{-1} \mathbf{S}_{m-1} \mathbf{L}_{m-1}^{-\top} \mathbf{s} S_{mm}^{-1} - \\ & S_{mm}^{-1} \mathbf{s}^\top \mathbf{L}_{m-1}^{-\top} \mathbf{s} S_{mm}^{-1} - S_{mm}^{-1} \mathbf{s}^\top \mathbf{L}_{m-1}^{-1} \mathbf{s} S_{mm}^{-1} + S_{mm}^{-1} \end{bmatrix}$$

が成り立ち， $V_\beta[m, m]$ は以下のように計算される¹⁵．

$$\begin{aligned} V_\beta[m, m] &= \sigma_i^2 \left[S_{mm}^{-1} \mathbf{s}^\top \mathbf{L}_{m-1}^{-1} \mathbf{S}_{m-1} \mathbf{L}_{m-1}^{-\top} \mathbf{s} S_{mm}^{-1} - S_{mm}^{-1} \mathbf{s}^\top \mathbf{L}_{m-1}^{-\top} \mathbf{s} S_{mm}^{-1} - S_{mm}^{-1} \mathbf{s}^\top \mathbf{L}_{m-1}^{-1} \mathbf{s} S_{mm}^{-1} + S_{mm}^{-1} \right] \\ &= \sigma_i^2 \left[S_{mm}^{-1} \mathbf{s}^\top \mathbf{L}_{m-1}^{-1} \left(\mathbf{S}_{m-1} - \mathbf{L}_{m-1} - \mathbf{L}_{m-1}^\top \right) \mathbf{L}_{m-1}^{-\top} \mathbf{s} S_{mm}^{-1} + S_{mm}^{-1} \right] \\ &= \sigma_i^2 \left[-S_{mm}^{-1} \mathbf{s}^\top \mathbf{L}_{m-1}^{-1} \text{diag} [S_{11}, \dots, S_{(m-1)(m-1)}] \mathbf{L}_{m-1}^{-\top} \mathbf{s} S_{mm}^{-1} + S_{mm}^{-1} \right] \\ &\leq \sigma_i^2 S_{mm}^{-1} \end{aligned} \tag{A.15}$$

結果として， $k = m$ について，(A.12) 式が成り立つ。 ■

標準回帰モデルの仮定の下ではあるものの，命題 1 は， k 次 I-共変動の標準誤差が， $R_{i,t}$ を被説明変数， $R_{M,t}^k$ を説明変数とする単回帰係数の標準誤差以下となることを示す．なお，(A.15) 式より， m 次 I-共変動の分散は，以下のように計算されることに注意する．

$$V_\beta[m, m] = \sigma_i^2 \left[-S_{mm}^{-1} \mathbf{s}^\top \mathbf{L}_{m-1}^{-1} \text{diag} [S_{11}, \dots, S_{(m-1)(m-1)}] \mathbf{L}_{m-1}^{-\top} \mathbf{s} S_{mm}^{-1} + S_{mm}^{-1} \right] \tag{A.16}$$

一方， $V_b[m, m]$ については， $\hat{\Sigma}_M$ に逆行列の公式 (例えば [10]) を適用することにより，

$$V_b[m, m] = \sigma_i^2 \left(S_{mm} - \mathbf{s}^\top \mathbf{S}_{m-1}^{-1} \mathbf{s} \right)^{-1} \tag{A.17}$$

が成立する．

B I-共変動推定量に関するその他の統計量と 7 次以上の I-共変動有意比率

第 5.1 節における全期間を対象とした分析の Table 5.1 と同一のデータに対し，クロスセクションにおけるその他の統計量および片側 1%–10% の有意比率を Table B.1 に示す．また，より高次 ($k = 7, \dots, 10$) の I-共変動の片側 5% 有意比率と推定結果要約を Table B.2 に示す．

¹⁴文献 [10] pp. 41–43 参照．

¹⁵ただし， $\text{diag}[a_1, \dots, a_j] \in \mathfrak{R}^{j \times j}$ は， a_1, \dots, a_j を対角成分にもつ対角行列である．

Table B.1: $\beta_{iM}^{(k)}$ の推定結果 (中央値・最大値・最小値・歪度・尖度・上下 $x\%$ 点を除く平均) と有意比率 (片側 1%–10%). ただし, 尖度は, 正規分布において 0 となる超過尖度を算出.

| 次数 | $k = 1$ | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ | $k = 6$ |
|---------------------------|---------|---------|---------|----------|----------|-----------|
| 【推計値】 | | | | | | |
| 中央値 | 0.840 | -0.635 | 10.891 | 17.232 | 17.601 | 287.831 |
| 最大値 | 1.452 | 5.029 | 82.809 | 218.987 | 1284.840 | 5477.599 |
| 最小値 | 0.237 | -4.434 | -46.239 | -167.233 | -604.909 | -6218.199 |
| 歪度 | 0.048 | 0.464 | 0.210 | 0.091 | 0.662 | -0.214 |
| 尖度 | -0.634 | 1.195 | 2.118 | 0.020 | 1.461 | 0.707 |
| 1% (99%) 点超を除く平均 | 0.844 | -0.578 | 10.791 | 19.465 | 36.198 | 279.969 |
| 5% (95%) 点超を除く平均 | 0.843 | -0.597 | 10.786 | 19.371 | 31.029 | 288.958 |
| 10% (95%) 点超を除く平均 | 0.842 | -0.601 | 10.879 | 19.166 | 28.080 | 293.883 |
| 【t 値】 | | | | | | |
| 中央値 | 39.098 | -1.191 | 2.114 | 0.375 | 0.055 | 0.115 |
| 最大値 | 88.401 | 5.891 | 12.218 | 5.537 | 2.901 | 2.141 |
| 最小値 | 14.231 | -7.880 | -5.918 | -4.172 | -1.862 | -2.333 |
| 歪度 | 0.589 | 0.384 | 0.009 | 0.103 | 0.291 | 0.014 |
| 尖度 | 0.016 | 0.379 | 0.512 | 0.064 | 0.623 | 0.454 |
| 1% (99%) 点超を除く平均 | 40.260 | -1.066 | 2.067 | 0.460 | 0.061 | 0.130 |
| 5% (95%) 点超を除く平均 | 39.857 | -1.110 | 2.076 | 0.456 | 0.056 | 0.129 |
| 10% (90%) 点超を除く平均 | 39.569 | -1.135 | 2.094 | 0.446 | 0.055 | 0.127 |
| 【プラス有意比率】 | (%) | (%) | (%) | (%) | (%) | (%) |
| 片側 1% | 100.000 | 6.273 | 46.402 | 9.502 | 0.277 | 0.000 |
| 片側 5% | 100.000 | 9.686 | 59.317 | 20.572 | 1.107 | 0.369 |
| 片側 10% | 100.000 | 12.638 | 64.668 | 27.860 | 2.768 | 2.399 |
| 【マイナス有意比率】 | (%) | (%) | (%) | (%) | (%) | (%) |
| 片側 1% | 0.000 | 26.292 | 3.782 | 1.568 | 0.000 | 0.092 |
| 片側 5% | 0.000 | 40.129 | 6.642 | 5.812 | 0.092 | 0.185 |
| 片側 10% | 0.000 | 48.247 | 8.856 | 9.041 | 1.292 | 0.830 |

Table B.2: 次数 $k = 7, \dots, 10$ の場合の I-共変動推定結果 (要約) と片側 5%有意比率

| 次数 | $k = 7$ | $k = 8$ | $k = 9$ | $k = 10$ |
|--------------|----------|-----------|------------|-------------|
| 推計値平均 | 2017.431 | 9469.285 | 92981.087 | 360327.003 |
| 推計値標準偏差 | 6957.883 | 48701.899 | 236960.064 | 1669314.625 |
| t 値平均 | 0.074 | 0.084 | 0.070 | 0.059 |
| t 値標準偏差 | 0.322 | 0.322 | 0.207 | 0.206 |
| プラス有意比率 (%) | 0.092 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| マイナス有意比率 (%) | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |