

共和分性に基づく最適ペアトレード*

山田 雄二[†], James A. Primbs[‡]

概要

一般に、株式価格はランダムウォークに従い、将来の価格を予測することはできない。一方、同業同規模の企業の銘柄など、株式価格が一定の差 (スプレッド) を維持しながら推移するような値動きが、市場において観測されることがある。このような株式価格における現象は、共和分性として特徴付けることができる。株式価格のペアが共和分する場合、スプレッドは平均回帰性をもつ。従って、一時的にスプレッドが平均を上回る (あるいは下回る) ような状況が生じても、いずれは平均的な水準に収束することが期待される。さらに、共和分ペアが複数存在すれば、これらを利用したポートフォリオ最適化問題を考えることができる。本論文では、このような共和分性をもつ株式価格のペアを抽出し、複数のスプレッドを利用して最適ポートフォリオを構築する手法について検討する。最適ポートフォリオについては、離散時間設定における条件付き平均・分散最適化問題、および、連続時間設定における動的最適化問題の2つの問題設定の下で計算し、実データを用いてシミュレーションを行う。さらに、離散時間設定の最適ポートフォリオに対し、取引コストやパラメータ推定期間の影響について考察する。

Keywords: 共和分ペア, スプレッド, 動的最適ポートフォリオ, 条件付き平均・分散ポートフォリオ, 取引コスト

1 はじめに

例として、株式 A , 株式 B という2つの株式価格の差によって定義されるスプレッド (同時点の株式 A の価格から株式 B の価格を差し引いたもの) を考える。このような株式価格のスプレッドは、時折、大きくなったりもするが、平均的には一定の値で推移しているものと仮定する。仮に、平均よりも大きなスプレッドが観測された際、株式 A に対してショートポジションをとると同時に株式 B に対してロングポジションをとれば、スプレッドはその時点の受取額 (キャッシュ・イン・フロー) を与える。一方、スプレッドは平均的には一定なので、時間が経過すれば元の水準に戻ることが期待される。このようにスプレッドが元の水準に戻った際に、今度は株式 A を買い戻すのと同時に株式 B を売却する反対取引を

*本論文の修正にあたり、匿名レフリーの方から有益なコメントをいただきました。ここに謝意を表します。また、本研究は、科研費 (22510138) の助成を受けております。

[†]筑波大学大学院 ビジネス科学研究科, Email: yuji@gssm.otsuka.tsukuba.ac.jp

[‡]Management Science and Engineering, Stanford University, Email: japrimbs@stanford.edu

実行すれば、スプレッドはその時点の支払額 (キャッシュ・アウト・フロー) を与える。また、反対取引によってポジションが清算されるので、スプレッドを利用した受取額と支払額の差は、投資家にとって正の利益として確定される。このように、スプレッドがある値に収束することを利用して取引を行う手法は、ペアーズ・トレード (あるいはスプレッド・トレード) と呼ばれる [11]。

一般に、株式価格はランダムウォークに従い、将来の株式価格を予測することはできない。一方、株式価格のスプレッドが一定値の近傍で変動するという現象は、株式市場においてしばしば観測される。このような現象は、経済時系列における共和分性 [3, 5] として特徴付けられる。また、株式価格のペアが共和分する場合、スプレッドは定常系列として与えられ、平均回帰性をもつものと考えられる。

本論文では、共和分ペアによって与えられるスプレッドをモデル化した上で、複数スプレッドによって構成されるポートフォリオを構築することを考える。まず、離散時間設定を考え、スプレッド過程が多変量自己回帰 (VAR) モデルに従うとの仮定の下、各時点までに観測された情報に基づく条件付き平均・分散最適化問題を定式化する。条件付き平均・分散ポートフォリオ最適化問題とは、通常平均・分散ポートフォリオ最適化における平均・分散の代わりに、条件付き期待値 (平均)、および条件付き分散を用いて定式化したもので、目的関数に対して 1 階の条件を適用することにより、最適ポートフォリオを、各時点までの観測変数の関数として明示的に計算することが可能である。ここでは、さらに、文献 [6] で提案されている連続時間設定における動的最適ポートフォリオを計算し、離散時間設定における最適ポートフォリオとの比較を行う。また、スプレッド・ポートフォリオに対する取引コストの影響について検証する。

本論文の構成は、以下の通りである。第 2 節では、共和分ペアの定義とその性質について説明し、離散時間設定、および連続時間設定におけるポートフォリオ最適化問題を定式化する。第 3 節では、共和分検定と本論文における共和分ペアの抽出方法を示す。第 4 節では、実際の資産価格データを用いて、離散時間設定における最適ポートフォリオと連続時間設定における動的ポートフォリオのパフォーマンス比較を行う。第 5 節では、スプレッド・ポートフォリオのシャープレシオに対する取引コストの影響について検証する。最後に、第 6 節でまとめと今後の課題を述べる。

2 共和分性とスプレッドを用いたポートフォリオ最適化問題

2.1 多変量時系列に対する共和分性

多変量時系列に対する共和分性とは、以下のように定義される。まず、 d 次の和分過程 $I(d)$ を導入する。与えられた時系列 $\{X_k\}_{k=0, \dots, N}$ が d 次の和分過程であるとは、 X_k が非定常かつその d 階差分の系列が定常 (ただし $d-1$ 階差分までは非定常) となる場合で、 $X_k \sim I(d)$ のように記述する。例えば X_k が 1 次の和分過程 ($X_k \sim I(1)$) であれば、 X_k が非定常かつ $\Delta X_k := X_k - X_{k-1}$ は定常となる。これは、 X_k を時点 k における株式価格とした場合、株式価格そのものはランダムウォーク (従って非定常) でも、その 1 階差分 (1 次の和分過程) は定常ということの意味する。

さらに、 $X_k \sim I(1)$, $Y_k \sim I(1)$ を満たす 2 つの時系列に対し、 $X_k - \beta Y_k$ を定常過程とする定数 $\beta \neq 0$ が存在するとき、 (X_k, Y_k) は共和分性をもつ (あるいは共和分する) という。また、共和分の定義は、以下のように、多次元のケースにも容易に拡張可能である [5]。 m 次元系列 $X_k := [X_k^{(1)}, \dots, X_k^{(m)}]^T$ (ただし

$X_k^{(i)} \sim I(1), \forall i \in [1, m]$ が共和分するとは, $b^\top X_k$ を定常とする共和分ベクトル $b := [\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(m)}]^\top$ が存在することである. また, 線形独立な共和分ベクトルが n 本存在する場合, n 次の共和分とよぶ.

本節では, 共和分ペアに着目し, 複数の共和分ペアのスプレッドによって定義される最適ポートフォリオを構築することを考える. ただし, ここでの考え方は, 一般的な共和分ベクトルのケースに対しても拡張可能である.

2.2 離散時間モデルと条件付き平均・分散最適ポートフォリオ

まず, 離散時間設定におけるスプレッド・ポートフォリオ最適化問題を定式化する. 第 $k \in [0, N]$ 日における株式価格

$$X_k \sim I(1), Y_k \sim I(1),$$

に対し, スプレッド過程 S_k を次式で定義する.

$$S_k := X_k - \beta Y_k, \quad (2.1)$$

ここでは, スプレッド過程 S_k が以下の自己回帰 (AR) モデルに従うケースを考える.

$$AR(q): S_k = \phi_1 S_{k-1} + \phi_2 S_{k-2} + \dots + \phi_q S_{k-q} + \epsilon_k, \quad (2.2)$$

ただし, ϵ_k は, 平均 μ , 分散 σ^2 のホワイトノイズであるが, μ_0 を S_k の条件なしの期待値とした場合, (2.2) 式の S_{k-i} を $S_{k-i} - \mu_0, i = 0, 1, \dots, q$ で置き換えることで, 一般性を失うことなく $\mu = 0$ を仮定することができる. また, m 個の株式価格のペア

$$\left(X_k^{(i)}, Y_k^{(i)} \right), i = 1, \dots, m \quad (2.3)$$

に対する m 次元スプレッド過程は, 下記の変量 AR (Vector AR; VAR) モデルとして与えられるとする.

$$VAR(q): S_k = \Phi_1 S_{k-1} + \Phi_2 S_{k-2} + \dots + \Phi_q S_{k-q} + e_k, \quad \Phi_i \in \mathfrak{R}^{m \times m}, i \in [1, q] \quad (2.4)$$

ただし,

$$S_k := \left[X_k^{(1)} - \beta^{(1)} Y_k^{(1)}, \dots, X_k^{(m)} - \beta^{(m)} Y_k^{(m)} \right]^\top \quad (2.5)$$

であり, e_k は, 共分散行列が $\Sigma \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ で与えられる, m -次元ホワイトノイズである¹. 次元の場合と同様に, ここでは $\mathbb{E}[e_k] = 0$ を仮定する.

スプレッドを用いてポートフォリオを構築するにあたり, 重要なのは, 一つ一つのスプレッドは, 個別銘柄のロング・ショートのパポジションにより, 直接取引をすることができるという点である. 例えば, i 番目のペアのスプレッドを 1 単位分取引したければ, 時点 k において, $X_k^{(i)}$ を 1 単位 (1 シェア) 購入すると同時に $Y_k^{(i)}$ を $\beta^{(i)}$ 単位空売りすればよい. この際, スプレッドの現在価値 $X_k^{(i)} - \beta^{(i)} Y_k^{(i)}$ が正

¹なお, 本節での議論は, (2.4) 式に移動平均 (Moving Average; MA) 項を加えた VARMA モデルに対しても容易に拡張可能である

であればスプレッドポジション構成時に正のコストが必要なので資金口座 (無リスク資産) から借り入れを行い, 負であれば資金口座に預け入れを行う。

ここで, 時点 k における i 番目のスプレッドに対する投資単位を $u_k^{(i)}$, $i \in [1, m]$, l 期間に対して適用される無リスク利率を r_l , 総資産 (富) を W_k とする。このとき, 時点 k から時点 $k+l$ にかけての富の変化量は, 以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} W_{k+l} - W_k &= \mathbf{u}_k^\top (\mathbf{S}_{k+l} - \mathbf{S}_k) + r_l (W_k - \mathbf{u}_k^\top \mathbf{S}_k) \\ &= r_l W_k + \mathbf{u}_k^\top [\mathbf{S}_{k+l} - (1+r_l) \mathbf{S}_k] \\ \mathbf{u}_k &:= [u_k^{(1)}, \dots, u_k^{(m)}]^\top \in \mathfrak{R}^m \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここでは, 時点 k から $k+l$ にかけての富の収益率

$$R_{k,k+l} := \frac{W_{k+l} - W_k}{W_k} \quad (2.7)$$

について, リスク回避係数 $\gamma > 0$ に対する条件付き平均・分散ポートフォリオ最適化問題

$$\max_{\mathbf{u}_k \in \mathfrak{R}^m} \left\{ \mathbb{E}_k [R_{k,k+l}] - \frac{\gamma}{2} \cdot \mathbb{V}_k [R_{k,k+l}] \right\} \quad (2.8)$$

を考える。ただし, $\mathbb{E}_k(\cdot)$, $\mathbb{V}_k(\cdot)$ は, それぞれ, 時点 k までの情報に基づく条件付き期待値, 条件付き分散を表す。

(2.6) 式の両辺を W_k で割ると,

$$\begin{aligned} \frac{W_{k+l} - W_k}{W_k} &= R_{k,k+l} \\ &= r_l + \mathbf{v}_k^\top [\mathbf{S}_{k+l} - (1+r_l) \mathbf{S}_k], \quad \mathbf{v}_k := \frac{\mathbf{u}_k}{W_k} \in \mathfrak{R}^m \end{aligned} \quad (2.9)$$

であるので, 富の条件付き期待収益率は以下のように計算される。

$$\mathbb{E}_k [R_{k,k+l}] = r_l + \mathbf{v}_k^\top [\mathbb{E}_k (\mathbf{S}_{k+l}) - (1+r_l) \mathbf{S}_k] \quad (2.10)$$

なお, (2.10) 式における $\mathbb{E}_k (\mathbf{S}_{k+l})$ の項は (2.4) 式を再帰的に適用することによって, 時点 k までの状態変数 S_j , $j = k, \dots, k-q$ を用いて記述することができる。

さらに, 条件付き収益率分散を定式化し, 条件付き平均・分散ポートフォリオ最適化問題を解くことを考える。まず, (2.4) 式の $VAR(q)$ モデルであるが, 適当な係数行列 Ψ_i , $i = 1, 2, \dots$ を定義することで, 次式のような移動平均 (Moving average; MA) 形式として表現できることが知られている。

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{e}_k + \Psi_1 \mathbf{e}_{k-1} + \Psi_2 \mathbf{e}_{k-2} + \dots \quad (2.11)$$

従って, 富の収益率の条件付き分散は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_k [R_{k,k+l}] &:= \mathbb{E}_k \left[(R_{k,k+l} - \mathbb{E}_k [R_{k,k+l}])^2 \right] \\ &= \mathbb{E}_k \left[\left\{ \mathbf{v}_k^\top (\mathbf{S}_{k+l} - \mathbb{E}_k [\mathbf{S}_{k+l}]) \right\}^2 \right] \\ &= \mathbf{v}_k^\top \left(\Sigma + \Psi_1 \Sigma \Psi_1^\top + \dots + \Psi_{l-1} \Sigma \Psi_{l-1}^\top \right) \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (2.12)$$

よって、条件付き平均・分散ポートフォリオ最適化問題 (2.8) は、次のように書き直すことができる。

$$\max_{\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^m} \left\{ r_l + \mathbf{v}_k^\top [\mathbb{E}_k(\mathbf{S}_{k+l}) - (1+r_l)\mathbf{S}_k] - \frac{\gamma}{2} \cdot \mathbf{v}_k^\top \left(\Sigma + \Psi_1 \Sigma \Psi_1^\top + \cdots + \Psi_{l-1} \Sigma \Psi_{l-1}^\top \right) \mathbf{v}_k \right\} \quad (2.13)$$

問題 (2.13) の解 $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k^* \in \mathbb{R}^m$ は、1 階の条件を適用することにより、

$$\mathbf{v}_k^* = \frac{1}{\gamma} \left(\Sigma + \Psi_1 \Sigma \Psi_1^\top + \cdots + \Psi_{l-1} \Sigma \Psi_{l-1}^\top \right)^{-1} [\mathbb{E}_k(\mathbf{S}_{k+l}) - (1+r_l)\mathbf{S}_k] \quad (2.14)$$

のように計算され、結果として最適ポートフォリオ $\mathbf{u}_k^* \in \mathbb{R}^m$ (各スプレッドへの時点 k における投資単位を要素とするベクトル) は、以下のように与えられる。

$$\mathbf{u}_k^* = W_k \mathbf{v}_k = \frac{W_k}{\gamma} \left(\Sigma + \Psi_1 \Sigma \Psi_1^\top + \cdots + \Psi_{l-1} \Sigma \Psi_{l-1}^\top \right)^{-1} [\mathbb{E}_k(\mathbf{S}_{k+l}) - (1+r_l)\mathbf{S}_k] \quad (2.15)$$

(2.15) 式における l は、時点 k からスプレッドの予測時点 $k+l$ までの期間を表すが、この間、投資単位 \mathbf{u}_k^* は一定である。また、(2.15) 式は時点 k における富とスプレッドの水準に依存するので、スプレッドに対する平均・分散最適ポートフォリオを複数期間 (多期間) に対して適用する場合、時間の経過とともに、富の水準やスプレッドの変化に合わせた投資単位の変更 (リバランス) が必要である。このような多期間設定に対しては、期間 l はリバランス周期を表す。なお、 $l=1$ であれば、データ観測頻度が日次ならリバランス周期も日次となり、 \mathbf{u}_k^* は次式で与えられる。

$$\mathbf{u}_k^* = \frac{W_k}{\gamma} \Sigma^{-1} [\Phi_1 - (1+r_1)I_m] \mathbf{S}_k, \quad (2.16)$$

ただし、 I_m は m 次の単位行列である。

条件付き平均・分散最適ポートフォリオを構築するにあたり、推定することが必要なパラメータは、(2.5) 式の $\beta^{(i)}$, $i \in [1, m]$, $VAR(q)$ モデル (2.4) の係数行列 Φ_j , $j \in [1, q]$ とホワイトノイズの共分散行列 $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ である。本論文では、これらのパラメータは、学習期間における資産価格の時系列データから推定するものとする。

注意 1 本節で導入している平均・分散ポートフォリオ最適化問題 (2.8) は、個別資産の収益率を用いて定義される通常の Markowitz タイプの定式化 [8] と異なり、資産価格のスプレッドによって与えられるキャッシュフローに対してポートフォリオを構築している。また、スプレッドの定義も、文献 [11] 第 5 章で導入されているような個別資産の対数価格差 ($= \ln X_k - \ln Y_k$) ではなく、価格差から直接定義されるキャッシュフロー ($= X_k - \beta Y_k$) をベースとすることで、複数資産のスプレッドに対して、同時に、最適ポートフォリオを構築することを実現している。

2.3 連続時間モデルと期待効用最適化問題

つぎに、前小節と同様の問題を連続時間の枠組みで設定することを考える。以下、連続時間の枠組みにおいて、スプレッド過程 $S_i(t)$ は、以下の Ornstein-Uhlenbeck (OU) 過程 [10] として表現されるものとする。

$$dS_i(t) = \kappa_i (\bar{S}_i - S_i(t)) dt + \sigma_i dZ_i(t), \quad i = 1, \dots, m \quad (2.17)$$

ただし, $\bar{S}_i := \mathbb{E}(S_i(t))$, $i = 1, \dots, m$ であり, Z_1, \dots, Z_m は $dZ_i(t)dZ_j(t) = \rho_{ij}dt$ ($i \neq j$, $-1 < \rho_{ij} < 1$) を満たす相関付きブラウン運動である. 前小節の離散時間の場合と同様に, 時点 t における株式価格のペア $(X_i(t), Y_i(t))$ に対するスプレッドは, $\beta^{(i)}$ を定数として, 以下のように定義される.

$$S_i(t) := X_i(t) - \beta^{(i)}Y_i(t), \quad i = 1, \dots, m \quad (2.18)$$

なお, OU 過程 (2.17) で表現される個別スプレッドは, 離散化により, $AR(1)$ に帰着することが可能である.

このように, OU 過程として与えられる m 個のスプレッドに対し, セルフファイナンスポートフォリオを構築する. 時点 t におけるスプレッド $S_i(t)$ の保有単位を $u_i(t)$ とすれば, セルフファイナンスポートフォリオにおける富 $W(t)$ は, 以下の確率微分方程式に従う.

$$dW(t) = \mathbf{u}(t)^\top d\mathbf{S}(t) + r \left[W(t) - \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{S}(t) \right] dt \quad (2.19)$$

ただし,

$$\mathbf{S}(t) := [S_1(t), \dots, S_m(t)]^\top, \quad \mathbf{u}(t) := [u_1(t), \dots, u_m(t)]^\top$$

である. このとき, ポートフォリオ最適化問題は, 単調増加な効用関数 $U(\cdot)$ に対し, 将来時点 T における富の期待効用を最大化するスプレッドの保有単位 $\mathbf{u}(t)$ を求める問題

$$\max_{\mathbf{u}(t)} \mathbb{E}[U(W(T))] \quad (2.20)$$

として定式化される.

特に, 効用関数がべき関数

$$U(x) := \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma} \quad (2.21)$$

(ただし, $\gamma > 0$ ($\neq 1$) は相対的リスク回避係数) のとき, 最適ポートフォリオは Riccati 方程式と線形微分方程式の解を用いて表現され [1, 2, 4], 効率的に計算可能である. 以下の $\mathbf{u}^*(t) \in \mathbb{R}^m$ は, このような最適制御測である.

$$\mathbf{u}^*(t) = \frac{W(t)}{\gamma} \left[\Sigma^{-1}K (\bar{\mathbf{S}} - \mathbf{S}(t)) - r\mathbf{S}(t) + 2A(t)\mathbf{S}(t) + b(t) \right] \quad (2.22)$$

ここで, $\Sigma = \Sigma^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}$ は (i, j) -成分が $\sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$ (ただし $i = j$ のとき $\rho_{ii} = \rho_{jj} = 1$) で与えられる共分散行列, $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ は κ_i , $i = 1, \dots, m$ を対角成分とする対角行列, $\bar{\mathbf{S}} \in \mathbb{R}^m$ は \mathbf{S} の期待値を各要素にもつベクトルであり, $A(t)$ は次式の Riccati 型行列微分方程式を満たす.

$$\dot{A} + \frac{2}{\gamma} A^\top \Sigma A - A^\top Y - Y^\top A - Q = 0, \quad A(T) = 0 \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (2.23)$$

ただし,

$$Y := \frac{1}{\gamma} \{K - r(\gamma - 1)I_m\}, \quad Q := \frac{\gamma - 1}{2\gamma} (K + rI_m)^\top \Sigma^{-1} (K + rI_m)$$

である. また, $b(t) \in \mathbb{R}^m$ は, $A(t)$ を入力変数とする線形微分方程式の解であり, $b(T) = 0 \in \mathbb{R}^m$ を満たす.

(2.22) 式の $u^*(t)$ において, $A(t)$ と $b(t)$ は, 満期 T に依存する項である. 一方, (2.22) 式で $A(t) \equiv 0$, $b(t) \equiv 0$ とした際の残りの部分は満期に依存せず, Myopic 項と呼ばれる. 今, Myopic 項のみによって与えられるポートフォリオを

$$u_{myo} := \frac{W(t)}{\gamma} [\Sigma^{-1}K(\bar{S} - S(t)) - rS(t)] \quad (2.24)$$

とおき, OU 過程 (2.17) を $dt \equiv 1$ として離散化した上で, u_{myo} を以下のように離散時間の記法を用いて書き直すことを考える.

まず, (2.24) 式において, $W(t) = W_k$, $S(t) = S_k$, $\bar{S} = 0$ とすると,

$$u_{myo} = \frac{W_k}{\gamma} [\Sigma^{-1}(-K - rI_m)S_k]$$

である. このとき,

$$K = I - \Phi_1$$

であれば, u_{myo} は, 離散時間モデルにおける (2.16) 式の u_k^* に一致することが分かる. 実際, OU 過程 (2.17) を離散化すれば, 個別スプレッドは $AR(1)$ として記述することができるので, $q = 1$ かつ Φ_1 が対角行列の場合, $u_k^* = u_{myo}$ が成り立つ. 従って, 連続時間設定における最適ポートフォリオの Myopic 項は, $q = l = 1$ の場合の平均・分散ポートフォリオに相当することが分かる. そこで, 本論文では, 離散時間モデルにおいて $q = l = 1$ を仮定したものを Myopic ポートフォリオと呼び, 次節において Myopic ポートフォリオと連続時間最適ポートフォリオのパフォーマンスを比較することにする. なお, u_{myo} についても, 時点 t において観測されるスプレッドやその時点の富の水準 $W(t)$ に依存するので, 時点とともに変化する動的なポートフォリオと考えることができるが, $u^*(t)$ はさらに満期までの期間にも動的に依存するという意味で, 本論文では, 連続時間最適ポートフォリオを動的ポートフォリオと呼ぶ.

3 共和分の検定とペアの抽出法

3.1 共和分の検定

本論文では, 株式価格のペアの共和分性を見るために, Engle-Granger の共和分検定 [3] を適用することを考える. Engle-Granger の共和分検定は, 以下の 2 段階によって構成される.

Engle-Granger の共和分検定: 1 次の和分過程 $X_k \sim I(1)$, $Y_k \sim I(1)$ が与えられるとする.

Step 1: Y_k を X_k について回帰し, 次式を満たす β, c を求める.

$$Y_k := \beta X_k + c + \eta_k \quad (3.1)$$

ただし, η_k は残差である. β, c の最小二乗 (OLS) 推定量を $\hat{\beta}, \hat{c}$ とし, S_k を以下のように定義する.

$$S_k := Y_k - \hat{\beta}X_k - \hat{c}. \quad (3.2)$$

Step 2: $\Delta S_j := S_j - S_{j-1}$ とし, 次式を満たす OLS 回帰パラメータを求める.

$$\Delta S_k = \delta S_{k-1} + \sum_{i=1}^n a_i \Delta S_{k-i} + \varepsilon_k \quad (3.3)$$

ただし, ε_k は残差である. このとき, $\delta = 0$ を帰無仮説として検定を行い, 帰無仮説が棄却されれば, 対立仮説 $\delta < 0$ を採用し, X_k と Y_k は共和分するものと結論する.

(3.3) 式において, $\delta = 0$ が棄却されなければ, 原系列は単位根をもつと結論され, 結果として S_k は非定常ということになる. 本論文では, このような単位根の存在を検定するにあたり, Augmented Dickey-Fuller (ADF) 検定を用いる.

ADF 検定は, 以下に定義する t_e を検定量として行う単位根検定の一つで, t_e が与えられた有意水準を満たす閾値を下回れば (片側 t 検定で負に有意), 帰無仮説 $\delta = 0$ を棄却し, $\delta < 0$ を採択するものである.

$$t_e := \frac{\hat{\delta}}{\hat{s}_e} \quad (3.4)$$

ただし, $\hat{\delta}$ は, (3.3) 式における δ の OLS 推定量であり, \hat{s}_e は標準誤差である.

3.2 共和分ペアの抽出

与えられた銘柄の系列に対してペアの共和分性を検定する場合, 検定すべきペアの総数は, 銘柄数の二乗に比例する. 例えば, 日経平均株価の対象銘柄である 225 銘柄に対して分析を行おうとすれば, 構成可能なペアの総数は,

$$225 \times \frac{225 - 1}{2} = 25,200,$$

である. さらに, Engle-Granger 共和分検定を行う際, 説明変数と被説明変数を入れ替えることによっても, 共和分ベクトルや統計量の値が異なることから, 実際には,

$$25,200 \times 2 = 50,400$$

個のペアに対して検定を行わなければならないことになる. 一方, 理論的には, 共和分ベクトルの数は, 多変量時系列における変数の数より少ないことが知られているため [7], 本来, 共和分ペアの数は高々 224 個以下となる.

ここでは, 全てのペアについて共和分検定を行うのではなく, 以下のようにスクリーニング手続きを実行したあとで, スクリーニングを通過したペアに対して Engle-Granger 共和分検定を実施し, ペアを抽出することにする.

スクリーニング手続き: 選択した業種に属する全てのペアに対して, Dickey-Fuller (DF) 統計量と相関係数を計算し, 相関係数が 0.8 以下, あるいは, DF 統計量が与えられた閾値を下回ったペアを分析対象から取り除く.

ペアの抽出手続き: スクリーニング手続きを通過したペアのリストに対し, DF 統計量が小さいものから ADF 検定を適用する. なお, ADF 検定におけるラグの次数は, 最大 10 までから AIC 規準によって最適なものを設定し, ADF 検定を通過したペアを採用する.

DF 統計量とは, (3.3) 式に対する ADF 検定において, $a_i = 0, \forall i \in [0, n]$ とした統計量である. ここでは, 異なるペアに同一の銘柄が含まれないようにするため, ペアの抽出手続きにおいて ADF 検定を通過したペアと同一銘柄を含むものはリストから除外するようにした. また, 同一のペアであるが, 説明変数, 被説明変数を入れ換えた際にともに採用されてしまうような場合は, DF 統計量の小さい (負の有意性が高い) 方のみを採用する.

4 実証分析 1: 動的ポートフォリオと Myopic ポートフォリオの比較

ここでは, 日経平均構成銘柄における以下の 10 業種に対して, 前節で導入したペア抽出手続きを業種ごとに実行し, スプレッドポートフォリオを構築することを考える.

Foods (11), Oil & coal products (3), Electric machinery (29), Automotive (9), Precision instruments (6), Railway/Bus (7), Communications (6), Electric power (3), Gas (2), Services (8)

なお, ここで選択する 10 業種は, 基本的には, 食品, エネルギー, 製造業, 交通・輸送, およびサービスに属する業種である. これらの業種分類は, 2009 年 6 月時点のものであり, 括弧内の数字は, 当該業種に含まれる銘柄数を表す. また, 個別資産の資産価格データは, 2004 年 1 月から 2009 年 10 月までの日次データ (調整済み終値) を用いる.

4.1 ペア抽出手続きの適用

本節の分析においては, 2004 年–2006 年末までのデータに対して, 前節で導入したペア抽出手続きを適用する. 以下, 自動車関係業種 (Automotive) に対して, ペア抽出手続きを適用した結果を示す. なお, Automotive に属す銘柄は,

Fuji Heavy Industries Ltd., Hino Motors, Ltd., Honda Motor Co., Ltd., Isuzu Motors Ltd., Mazda Motor Corp., Mitsubishi Motors Corp., Nissan Motor Co., Ltd., Suzuki Motor Corp., Toyota Motor Corp.

であり, また, 分析の対象となるペアの数は,

$$9 \times \frac{8}{2} \times 2 = 72.$$

で与えられる.

図 4.1 は, 分析対象となる 72 個のペアに対し, DF 統計量と相関係数を計算し, 相関係数を横軸, DF 統計量を縦軸に表示したものである. また, 点線は有意水準 5% の閾値である. ペアの表示であるが, 例えば の記号は, Nissan を被説明変数とする回帰の DF 統計量, および相関係数を表す. 説明変数と被説明変数を入れ替えても相関係数の値は変わらないので, どの銘柄と対になるかを見るには, 同じ x

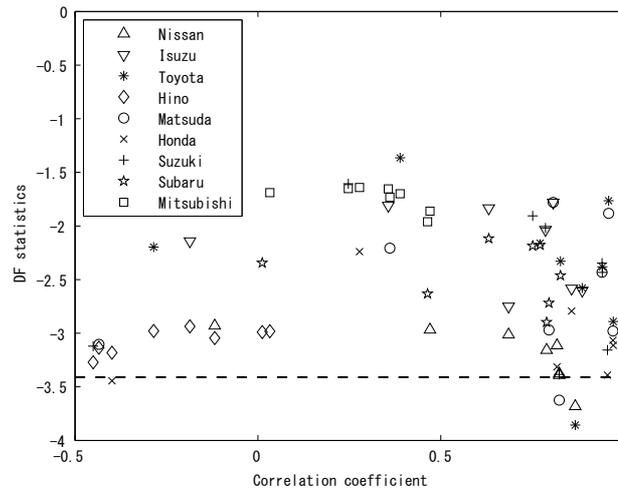


図 4.1: 自動車関係業種における相関係数 (横軸) と DF 統計量 (縦軸) の関係

座標をもつ別の銘柄の記号を探せばよい。この場合、同じ x 座標に、* で与えられる Toyota を被説明変数とする 5% 有意なペアが存在するので、これから Toyota-Nissan, Nissan-Toyota のペアがともに有意水準 5% を下回り、かつ、Toyota を被説明変数とする Toyota-Nissan の方が、DF 統計量の意味で有意性が高いことが分かる。また、図から、必ずしも相関の高いペアが共和分している訳ではないことも見てとれる。

以下は、Automotive において、スクリーニング手続きを通過したペアである。

Toyota-Nissan $[-3.8567]$, Matsuda-Nissan $[-3.6239]$.

ただし、括弧内の数値は DF 統計量を表す。DF 統計量の有意性が高いと考えられる Toyota-Nissan のペアに対し ADF 検定を行ったところ、 $\delta = 0$ の帰無仮説は棄却されないため、最終的に Toyota-Nissan 共和分ペアとして採択された。なお、Matsuda-Nissan も共和分ペアの候補ではあるが、Nissan はすでに別のペアに含まれているため、ここでは除外した。図 4.2 は、学習期間である 2004 年–2006 年の期間に対し、Toyota の株式価格を Nissan の株式価格で回帰した際の、Toyota の株式価格と、回帰式に Nissan の株式価格を代入した値 (予測値) との関係を表す。ただし、回帰係数および定数項の推定値は、それぞれ、

$$\hat{\beta} = 9.25, \quad \hat{c} = -6,270$$

である。この図から、共和分するペアにおいては、2 つの系列は頻りに交差し合うことが伺える。

つぎに、電気機器 (Electric machinery) 業種に対して同様の手続きを行う。なお、Electric machinery には、以下の 28 銘柄が属している。

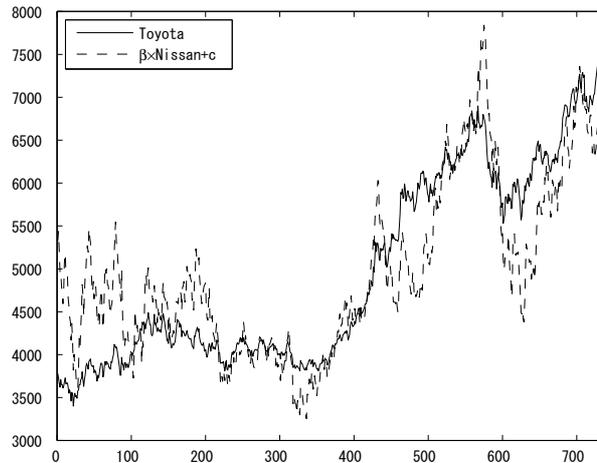


図 4.2: 2004 年–2006 年 の期間における Toyota の株式価格と $\hat{\beta} \times \text{Nissan} + \hat{c}$ の関係

Advantest Corp., Alps Electric Co., Ltd., Canon Inc., Casio Computer Co., Ltd., Clarion Co., Ltd., Denso Corp., Fanuc Ltd., Fuji Electric Holdings Co., Ltd., Fujitsu Ltd., GS Yuasa Corp., Hitachi, Ltd., Kyocera Corp., Panasonic Corp., Panasonic Electric Works Co., Ltd., Meidensha Corp., Minebea Co., Ltd., Mitsubishi Electric Corp., Mitsumi Electric Co., Ltd., NEC Corp., Oki Electric Industry Co., Ltd., Pioneer Corporation, Sanyo Electric Co., Ltd., Sharp Corp., Sony Corp., Taiyo Yuden Co., Ltd., TDK Corp., Tokyo Electron Ltd., Toshiba Corp., Yokogawa Electric Corp.

図 4.3 は、図 4.1 と同様の図である。ただし、Electric machinery に属す銘柄数が 28 と多いので、28 銘柄のうち最初の 9 銘柄と相関係数と DF 統計量の関係のみ表示している。当該業種については、812 のペアのうち 80 が有意水準 5% のスクリーニングを通過したため、さらに有意水準を 1% としてスクリーニングを行った。その結果、以下の 21 のペアがスクリーニング手続きを通過した（ただし、括弧内の数値は DF 統計量を示す）。

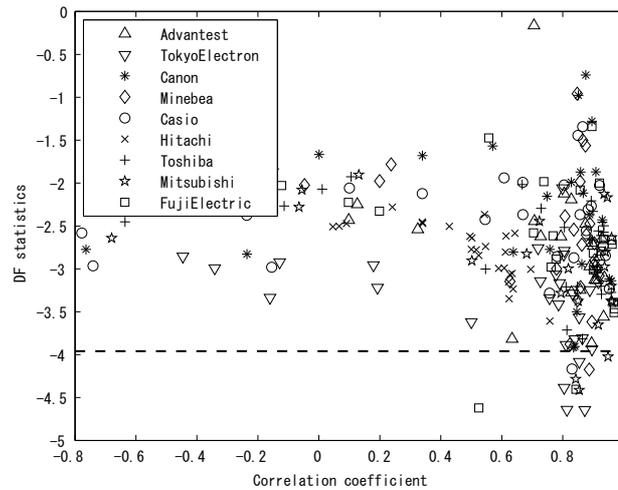


図 4.3: Correlation coefficient vs. DF statistics of pairs in the electric machinery

- | | |
|---|--|
| Tokyo Electron vs. Sharp [-4.6448], | Tokyo Electron vs. Taiyo Yuden [-4.6429], |
| TDK vs. Fuji Electric [-4.5072], | TDK vs. Mitsubishi Electric [-4.5038], |
| Mitsubishi Electric vs. Tokyo Electron [-4.4138], | Tokyo Electron vs. Kyocera [-4.3860], |
| TDK vs. Panasonic [-4.3709], | TDK vs. Casio [-4.3479], |
| Panasonic vs. Meidensha [-4.3201], | TDK vs. Canon [-4.2871], |
| Panasonic Electric Works vs. Sony [-4.2512], | TDK vs. Toshiba [-4.2012], |
| Minebea vs. Kyocera [-4.1729], | Sharp vs. Taiyo Yuden [-4.1697], |
| TDK vs. Panasonic Electric Works [-4.1248], | TDK vs. Fanuc [-4.1230], |
| TDK vs. Denso [-4.0813], | TDK vs. Fujitsu [-4.0599], |
| Kyocera vs. Taiyo Yuden [-4.0518], | Mitsubishi vs. Panasonic Electric Works [-4.0242], |
| TDK vs. Meidensha [-4.0233]. | |

これらのペアに対し，ADF 検定を実施したところ，以下の 5 つのペアが最終的に抽出された．

Tokyo Electron vs. Sharp, TDK vs. Fuji Electric, Panasonic vs. Meidensha,
Panasonic Electric Works vs. Sony, Minebea vs. Kyocera

さらに，同様の手続きを以下の業種に対しても行った．

Foods, Oil & coal products, Precision instruments, Railway/Bus, Communications,
Electric power, Gas, Services,

表 4.1 は，以上の手続きによって抽出されたペアのリストである．

表 4.1: Pairs list using the data in the period of 2004–2006

Japan Tobacco vs. Asahi Breweries (Foods),
 Showa Shell Sekiyu vs. Nippon Oil (Oil & coal products),
 Tokyo Electron vs. Sharp (Electric machinery),
 TDK vs. Fuji Electric (Electric machinery),
 Panasonic vs. Meidensha (Electric machinery),
 Panasonic Electric Works vs. Sony (Electric machinery),
 Minebea vs. Kyocera (Electric machinery),
 Toyota vs. Nissan (Automotive),
 Olympus vs. Nikon (Precision instruments),
 Tokyu vs. Tobu (Railway/Bus),
 KDDI vs. NTT (Communications),
 Chubu Electric Power vs. Kansai Electric Power (Electric power),
 CSK vs. Dentsu (Services)

4.2 ポートフォリオ最適化シミュレーション

つぎに、抽出したペアに対して第2節で導入したポートフォリオ最適化手法を適用し、動的ポートフォリオ、および Myopic ポートフォリオに対して、富の水準のパフォーマンスを比較する。ここでは、動的ポートフォリオのリバランス間隔を日次とし、Myopic ポートフォリオのリバランス間隔もこれに合わせる。さらに、連続時間の OU 過程 (2.17) と条件を一致させるため、 Φ_1 を対角行列とし、各スプレッドは $AR(1)$ に従うとする。この際、 $dt \equiv 1$ (日) とおけば、 $K = I - \Phi_1$ であり、 $VAR(1)$ は OU 過程 (2.17) を離散化したものと見なすことができる。また、各スプレッドにおける $\beta^{(i)}$ はペアの片方を被説明変数とする OLS 回帰係数によって与えられるとし、共分散行列 Σ を含めたこれらのパラメータは、学習期間 2004 年–2006 年の日次データを用いて推定し、シミュレーション期間においては固定する。なお、Myopic ポートフォリオの場合、新たなデータが観測される度にスプレッドにおける OLS 回帰係数や共分散行列 Σ を更新する手法も適用できるが、本節においては、動的ポートフォリオとの比較のため、シミュレーション期間を通してこれらのパラメータは一定であるとする。

まず、シミュレーション期間を 2007 年 (1 年間) に設定し、ペア数を変化させた際のポートフォリオのパフォーマンス変化を比較する。本シミュレーションでは、ポートフォリオを計算する際に必要なリスク回避係数は、Myopic ポートフォリオ ($=\gamma_{myo}$)、および動的ポートフォリオ ($=\gamma_{opt}$) に対して、それぞれ以下のように設定した。

$$\gamma_{myo} = 1.0 \times 10^2, \quad \gamma_{opt} = 1.0 \times 10^3$$

なお、動的ポートフォリオにおいては、リスク回避係数の他に満期 T を外生的に設定する必要がある。満期に関しては、評価期間 (本シミュレーションでは 1 年) に一致させることも一つの考え方であるが、ここでは、評価期間より長い $T = 2$ (年) に設定して比較を行う。なお、動的ポートフォリオにおけるこ

これらのパラメータの影響についての比較は、今後の課題として挙げたい。

図 4.4-4.7 は、ペアの数を $m = 2$ から $m = 13$ に変化させた際の富 W_k の水準を、横軸を時点として表示したものである。ただし、実線は動的ポートフォリオ、点線は Myopic ポートフォリオの富の水準を表し、時点 0 における富は $W_0 = 1$ に固定している。なお、シミュレーションに用いたペアの組み合わせとしては、表 4.1 におけるペアを、上から順にポートフォリオに組み入れるようにしている。例えば、 $m = 5$ の場合は、表 4.1 の上から 5 つのペアを選択している。

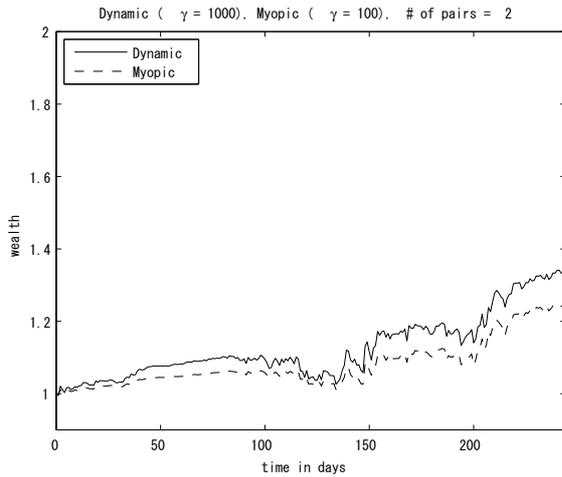


図 4.4: $m = 2$ の場合 (実線：動的ポートフォリオ, 点線：Myopic ポートフォリオ)

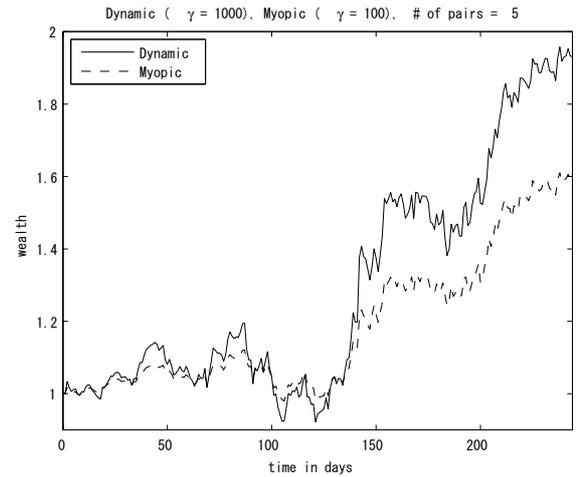


図 4.5: $m = 5$ の場合 (実線：動的ポートフォリオ, 点線：Myopic ポートフォリオ)

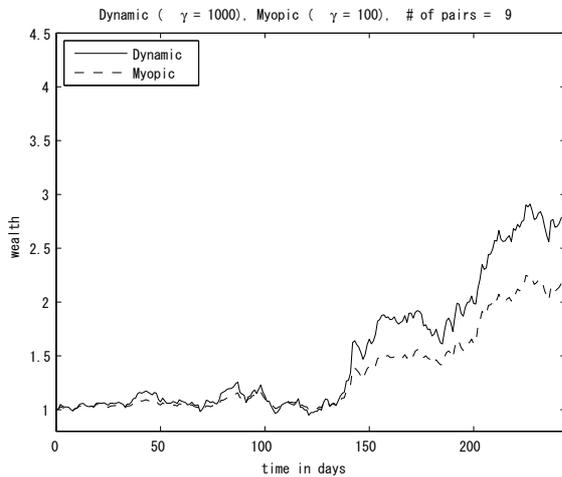


図 4.6: $m = 9$ の場合 (実線：動的ポートフォリオ, 点線：Myopic ポートフォリオ)

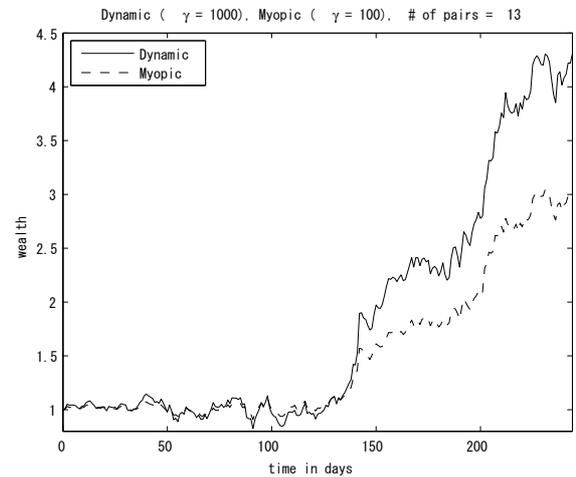


図 4.7: $m = 13$ の場合 (実線：動的ポートフォリオ, 点線：Myopic ポートフォリオ)

図 4.8 は、ペアの数を変化させた際のシャープレシオ (年次) の推移を表す。ただし、図の実線は動的

ポートフォリオのシャープレシオ, 点線は Myopic ポートフォリオのシャープレシオである. これから, 動的ポートフォリオの方が富の水準では上回ったとしても, ポートフォリオの効率性を表すシャープレシオにおいては, Myopic ポートフォリオの方が動的ポートフォリオを上回るパフォーマンスを, このデータ期間では示している. ただし, いずれの場合も, ペア数を増加させた方がシャープレシオが向上することが分かる.

図 4.8 は特定のペアの組み合わせに対する年次シャープレシオの値を表示したものであるが, 例えば, 13 個のペアから 2 つを選択する組合せは 78 通り存在する. 図 4.9 は, このような全ての組み合わせに対してシャープレシオを計算し, $m = 1$ から順にその平均値を表示したものである. このように, 可能な組み合わせ全てに対するシャープレシオの平均についても, 同様の傾向が観測される.

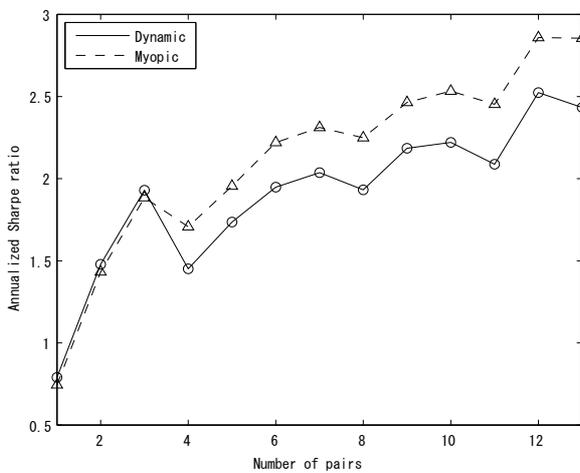


図 4.8: ペア数と年次シャープレシオの関係 (実線: 動的ポートフォリオ, 点線: Myopic ポートフォリオ)

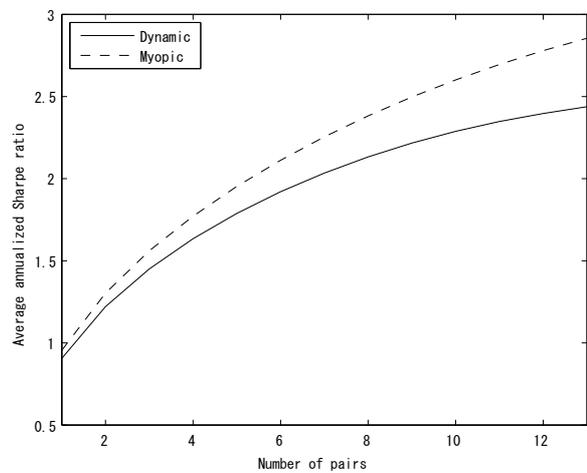


図 4.9: ペア数と年次シャープレシオの平均値 (実線: 動的ポートフォリオ, 点線: Myopic ポートフォリオ)

つぎに, シミュレーション期間を 2008 年として, 同じペア (表 4.1 における 13 ペア) に対してどの程度の期間まで, ポートフォリオのパフォーマンスが継続するかを考察する. ただし, OLS 回帰係数や共分散行列等のパラメータについては, 学習期間を 1 年間スライドし, 2005 年–2007 年の 3 年間の日次データを用いてパラメータ推定を行う. その他, リバランス頻度等の条件は, Fig. 4.7 で 2007 年をシミュレーション期間とした際と同様である.

Fig. 4.10 は, 上記設定の下, シミュレーション期間を 2008 年とした場合の動的ポートフォリオ, および Myopic ポートフォリオにおける富の水準を表示したものである. なお, 本分析における年次シャープレシオは, それぞれ, 以下のように与えられる.

$$\text{Sharp ratio (動的)} = 1.1533, \quad \text{Sharp ratio (Myopic)} = 1.0318. \quad (4.1)$$

Fig. 4.11 は, シミュレーション期間を 2009 年 (ただし, パラメータ推定ウィンドウは 2006 年–2008 年) として, 同様にポートフォリオの富の水準を計算したものである. 2007 年をシミュレーション期間とし

た Fig. 4.7 も合せると，2007 年から 2008 年にかけては，ポートフォリオが与える富の水準は順調に成長しているように見えるが，2008 年の 150–200 日目の間に大きな下落が見られる．これは，いわゆるリーマンショックが発生した期間と一致しているのであるが，どちらの場合も，下落は一時的なもので，すぐにもとの水準を回復している．さらに，2009 年に入っても途中までは富の水準は増加傾向であるが，90 日目あたりから突然，富の水準が低下し，そのまま回復せずにいることが分かる．また，特に後半以降は，富の水準の変動も激しい．

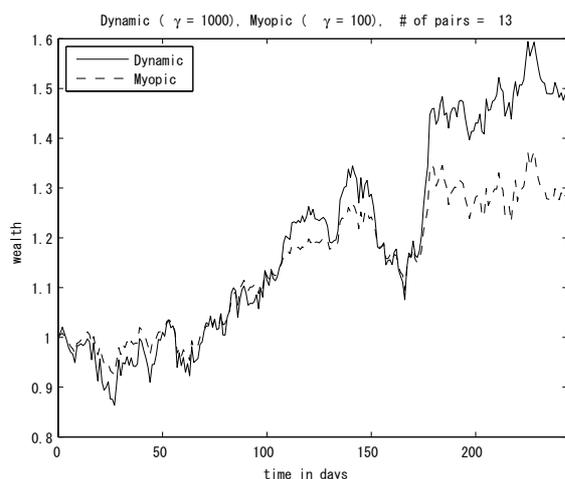


図 4.10: Out-of-sample simulation for year 2008

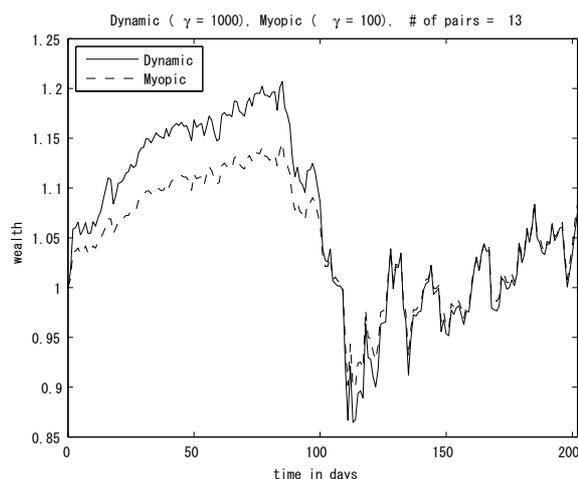


図 4.11: Out-of-sample simulation for year 2009

注意 2 本節の分析では，2004 年–2006 年の実績データから抽出したペアに対して，シミュレーション期間 2007 年においてはスプレッド・ポートフォリオが高いパフォーマンスを示していたものの，2008 年以降は時間の経過とともにパフォーマンスの劣化が見られ，特に 2009 年の中盤以降はパフォーマンスが大幅に悪化することが観測された．パフォーマンス劣化の要因としては，抽出したペアの共和分関係継続性の問題が挙げられるが，これに対しては，例えば 3ヶ月ごとにデータを更新してペアを再抽出し，ポートフォリオを構築し直すなどの対策が考えられる．このように，ペアの抽出も動的に行うことでパフォーマンスが向上することも期待されるが，次節で導入するような比例取引コストを考えた場合，ペアの入れ替えは単なる取引単位の調整よりも高い取引コストが想定される．従って，取引コストについての分析をまずは行う必要がある．そこで，本論文では，動的にペアを入れ替える手法は今後の課題とし，次節において，固定したペアに対する取引コストの影響について分析することとした．

5 実証分析 2: パラメータ推定期間と取引コストの影響分析

本節では，データ期間を 2007 年–2009 年として共和分するペアを再推定し，そのパフォーマンスについて評価する²．ここでは，取引コストやパラメータ推定期間の影響に関して詳細な分析を行うため，選

²本分析は，2009 年 10 月末時点までのデータを用いているため，2009 年におけるデータ観測日数は 203 日である

択したペアにおける共和分関係の継続性の影響は極力取り除くことを考える。そのため、シミュレーション期間は、ペアの推定期間の最終年である 2009 年に設定する。一方、回帰係数や共分散行列等のパラメータ推定期間についてはシミュレーション期間より前とし、Myopic ポートフォリオのみを用いて分析を行う。

注意 3 実務等での適用を考えた場合、ペア抽出も過去データに基づく必要があるため、シミュレーション期間をペア抽出期間に含めて分析を行うのは、一見、実用的ではない。一方、本分析では、取引コストとしてビッド・アスクスプレッドを考慮した場合、それ以外のパフォーマンス低下となる要因をあらかじめ除外するため、少なくとも共和分関係に関しては継続していることが期待されるように、シミュレーション期間をペア抽出期間に含めて分析を行った。逆の言い方をすれば、仮に本分析から、取引コストがパフォーマンスに与える影響が大きく実用上問題があるとの見解が得られれば、ペアの抽出手法を改善したとしても実務運用には適切ではないとの示唆が得られることになる。なお、本論文では、取引コストの要因としてビッド・アスクスプレッドを想定した比例取引コストを考えているが、実際にはショート側に借株コストも発生する。このような借株コストとしては、分析期間におけるショートポジション総額の平均に一定比率を掛けたもの等が候補として考えられるが、ここではリバランス頻度の影響を直接受けるコストとして、比例取引コストのみを取り扱うことにする。

5.1 準備

まず、3 節で導入したスクリーニング、およびペア抽出手続きを、2007 年–2009 年のデータに対して適用し、新しいペアを抽出する。表 5.1 は、抽出したペアのリストである。基本的には、3 節と同様の業種別でペアを抽出したが、ガスと電力については、単一業種では銘柄が少なく、かつ、ガスも電力もともにエネルギー事業で関係が深いものと考えられるため、本分析では同一業種とみなしてペアの抽出を行った。

図 5.1 は、2007–2008 年 (2 年間) を必要パラメータの推定期間とし、2009 年の実績データに対して最適ポートフォリオを適用した際の、富の水準のシミュレーション結果である。図 4.11 では、後半、パフォーマンスが低下したままであったが、新しいペアでは富の水準が順調に増加していくのが分かる。一方、図 5.2 は、パラメータ推定期間をシミュレーション期間直前の 1 年間 (2008 年) とした際の、富の水準の推移を表す。最終的な富の水準は、パラメータ推定期間を 2 年間とした場合を上回るものの、全体的にばらつきも大きく、また年次シャープレシオも 3.28 と、図 5.1 の 4.07 と比べて、若干、低下していることが分かる。

5.2 パラメータ推定ウィンドウを動かした場合

さらに、パラメータ推定期間を日数の経過とともに更新した際のスプレッド・ポートフォリオのパフォーマンス、および取引コストの影響について考察する。ここでは、推定パラメータの更新は一定間隔で行うことにし、パラメータ推定に用いるデータは、直近の 1 年間、もしくは 2 年間のものを用いることにする。例えば、パラメータの更新間隔を 1 日とすれば、毎日、新しいデータを含むデータ期間でパラメー

表 5.1: 新たな分析期間 (2007 年–2009 年) における共和分ペア

Sapporo vs. Asahi Breweries (Foods),
Ajinomoto vs. Kikkoman (Foods),
Nippon Oil vs. Nippon Mining Holdings (Oil & coal products),
Advantest vs. Taiyo Yuden (Electric machinery),
TDK vs. Tokyo Electron (Electric machinery),
Canon vs. Kyocera (Electric machinery),
Minebea vs. Denso (Electric machinery),
Fanuc vs. Toshiba (Electric machinery),
Fuji Electric vs. Sony (Electric machinery),
Honda vs. Nissan (Automotive),
Matsuda vs. Fuji Heavy Industries (Automotive),
Konica Minolta Holdings vs. Nikon (Precision instruments),
West Japan Railway vs. East Japan Railway (Railway/Bus),
NTT Data vs. NTT (Communications),
Tokyo Gas vs. Chubu Electric Power (Gas/Electric power),
Yahoo vs. Konami (Services)

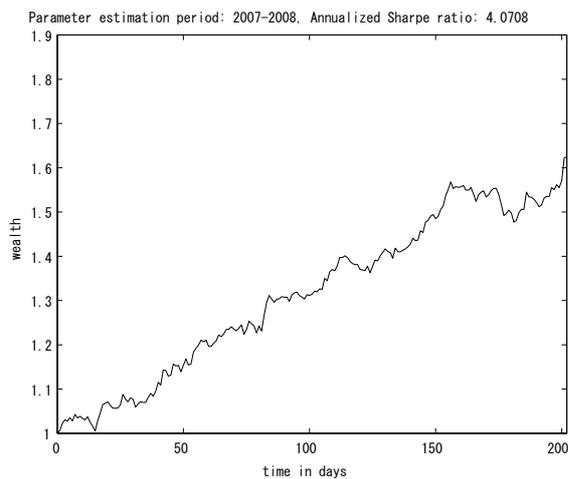


図 5.1: シミュレーション結果 (推定期間:2007–2008 年, シミュレーション期間:2009 年)

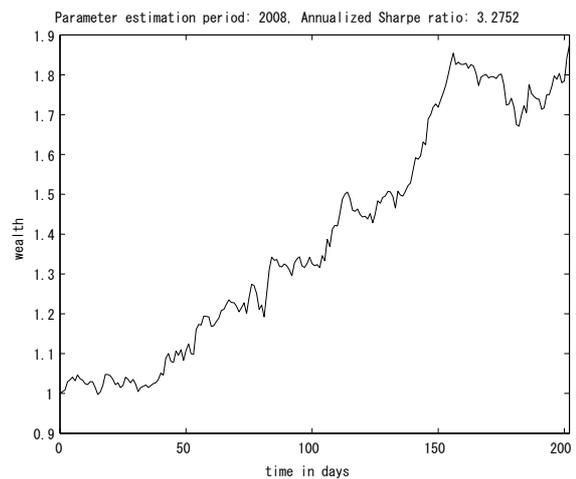


図 5.2: シミュレーション結果 (推定期間:2008 年, シミュレーション期間:2009 年)

タを再計算することになる．一方，更新頻度をシミュレーション期間と同一にすれば，時点0で求めたパラメータを最後まで用いることになり，前小節のシミュレーション結果と一致する．

図 5.3–5.4 は，このように更新間隔をずらしながらシミュレーションした際の，更新間隔に対するポートフォリオの年次シャープレシオを表す．ただし，パラメータの推定ウィンドウ（パラメータを計算するのに用いるデータ期間の長さ）は，図 5.3 で1年間，図 5.4 で2年間に固定している．また，横軸は，パラメータの更新間隔を示し，左端が更新間隔1日（毎日更新）であり，右端はシミュレーション期間においてパラメータの更新が一度も行われないケースに対応する．いずれの場合も，パラメータの更新間隔が短い方が，シャープレシオが高くなる傾向にある．ただし，パラメータ推定ウィンドウを2年間とした場合は，改善の度合いは1年の場合ほどは高くはない．

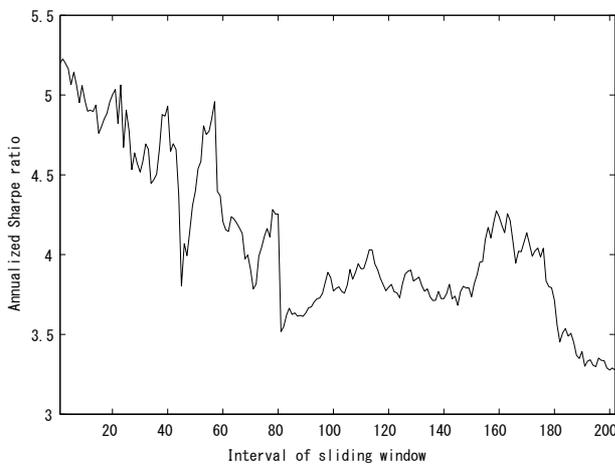


図 5.3: パラメータ更新間隔に対する年次シャープレシオの関係（パラメータ推定ウィンドウ1年の場合）

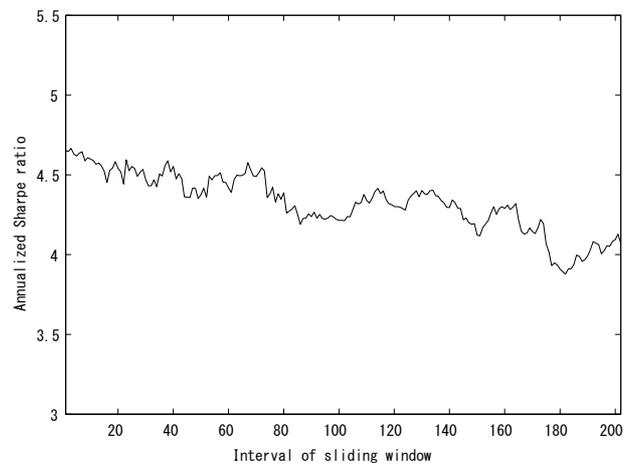


図 5.4: パラメータ更新間隔に対する年次シャープレシオの関係（パラメータ推定ウィンドウ2年の場合）

一方，推定期間をずらさない前小節の分析では，パラメータ推定ウィンドウが1年のケースは2年のケースよりもシャープレシオが低かったが，更新頻度を上げると結果が逆転するようになる．特にパラメータを毎日更新する場合は，パラメータ推定ウィンドウ1年の場合のシャープレシオが，2年のものを0.5以上上回る結果となった．また，両者とも更新頻度が最も高いケースにおいて，シャープレシオが最大化されている．図 5.5–5.6 は，このときの富の水準の推移を表す．ただし，図 5.5 は推定ウィンドウが1年，図 5.6 は推定ウィンドウが2年のケースであり，更新間隔はともに1日である．

5.3 取引コストの影響

最後に，取引コストの影響について分析を行う．ここでは，株式投資額を口座残高としてもつような株式口座を考えた場合に，取引によって変化した口座残高の差額の絶対値に比例して，取引コストが発

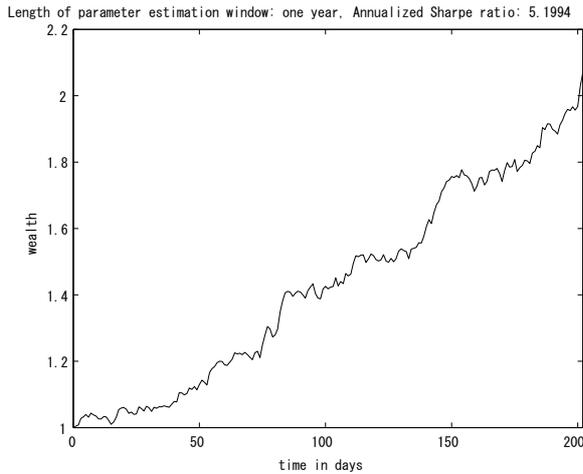


図 5.5: 富の水準シミュレーション結果 (パラメータ更新間隔 1 日, パラメータ推定ウィンドウ 1 年の場合)

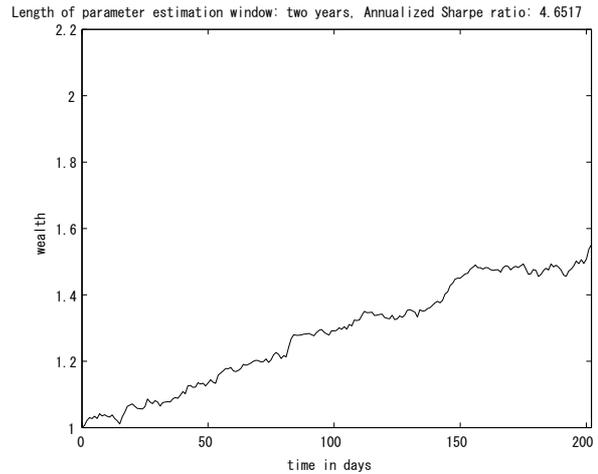


図 5.6: 富の水準シミュレーション結果 (パラメータ更新間隔 1 日, パラメータ推定ウィンドウ 2 年の場合)

生するものとする。すなわち，取引コスト率を ρ とした場合，取引コストは以下のように与えられる。

$$\rho \times |\text{取引後の株式口座残高} - \text{取引前の株式口座残高}| \quad (5.1)$$

例えば， $\rho = 0.1\%$ の際に 100 円の株式の保有単位を 100 から 120 に増やした場合の取引コストは，

$$0.001 \times |(120 - 100) \cdot 100| = 2 \text{ (円)}$$

である。ここでは，このような取引コストを，比例取引コストと呼ぶ。

図 5.7-5.8 は，取引コスト率を $\rho = 0\%$ から $\rho = 0.5\%$ まで増加させた際の，パラメータ更新間隔に対する年次シャープレシオの推移を表す。ただし，パラメータ推定ウィンドウは，図 5.7 が 1 年間，図 5.8 が 2 年間である。ともに一番上の実線が $\rho = 0\%$ における年次シャープレシオであり，図 5.3-5.4 が与える年次シャープレシオに一致する。

図 5.7-5.8 において，比例取引コスト率が増加すると，シャープレシオは低下するが，その低下率は，パラメータ更新間隔の短い方が大きいことが分かる。例えば，ともにパラメータ更新間隔が 1 日のときが $\rho = 0\%$ において最もシャープレシオが高いのであるが， $\rho = 0.5\%$ の場合は，パラメータ更新間隔が 1 日の際にシャープレシオが最も低い。また，推定ウィンドウが 2 年のケースは， $\rho = 0.5\%$ の際に，図の右端に相当する，パラメータの更新を一度も行わないケースが最も高いシャープレシオを与えている。

比例取引コストは，ビッド・アスクスプレッドと深い関係があるものと考えられる。例えば，ビッド・アスクスプレッドが 1% の場合，真の価格がビッド価格とアスク価格の真ん中にあるとすれば，売買のたびに 0.5% の取引コストを支払っているのと同様である。分析で用いたデータは，売り価格と買い価格が区別されている訳ではないので，実際には，このようなビッド・アスクスプレッドに起因する取引コストの影響は相殺されていると考えられるが，0.5% という取引コストの下でも，推定ウィンドウが 2 年

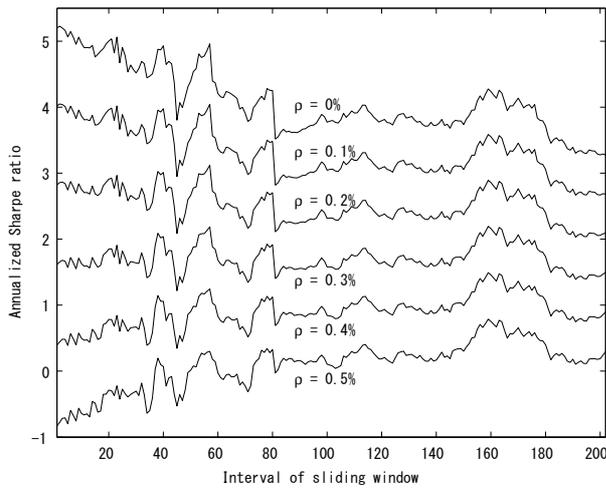


図 5.7: パラメータ更新間隔に対する年次シャープレシオの関係 (パラメータ推定ウィンドウ 1 年, 上から $\rho = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ [%])

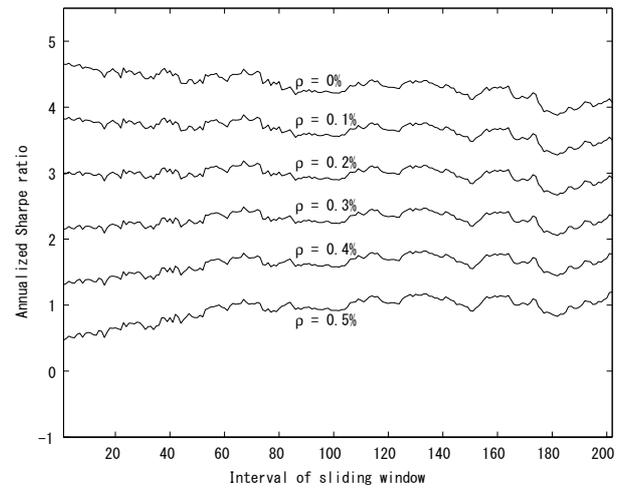


図 5.8: パラメータ更新間隔に対する年次シャープレシオの関係 (パラメータ推定ウィンドウ 2 年, 上から $\rho = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ [%])

のケースでは年次シャープレシオが 1 を超えるケースもあり, スプレッド・ポートフォリオにおける富が, ある程度の水準をこの例では維持している。

6 まとめと今後の課題

本論文では, 共和分ペアによって与えられるスプレッドをモデル化した上で, 複数スプレッドによって構成されるポートフォリオの最適化問題について検討した。まず, 離散時間設定の下, VAR モデルとして与えられるスプレッド過程に対し, 各時点までに観測された情報に基づく条件付き平均・分散最適化問題を定式化し, 1 階の条件を適用することにより最適ポートフォリオを計算した。さらに, 連続時間設定における動的最適ポートフォリオを計算し, 離散時間設定における最適ポートフォリオとの比較を行った。また, スプレッド・ポートフォリオに対する取引コストの影響について, シャープレシオを用いて検証した。

シミュレーションにおいては, まず, 学習期間における日次の株式価格データを用いて共和分ペアを抽出し, シミュレーション期間の実績データに対して, 最適ポートフォリオのパフォーマンスを測定した。最適ポートフォリオについては, 離散時間設定における 1 期間問題, および連続時間設定における動的最適化問題の 2 つの設定に対して計算したが, シミュレーションでは, 顕著な差が見られなかった。

さらに, パラメータ推定期間の影響を見るために, 一定の間隔で推定ウィンドウを動かしながらポートフォリオの必要パラメータを再計算し, 分析を行った。この際, 更新頻度の高い方が, シャープレシオに改善が見られたが, 取引コストを考慮した分析では, 必ずしも更新頻度が高い方がシャープレシオが改善されるとは限らず, 逆に, 取引コスト率を上げると, 更新頻度が高い方がシャープレシオの劣化が顕著であるという結果が得られた。

今後の課題としては、共和分ベクトルを用いたポートフォリオの構築、およびより直近のデータを用いた分析が挙げられる。

参考文献

- [1] J. Campbell and L. Viceira, *Strategic Asset Allocation*, Oxford University Press, 2002.
- [2] J. Campbell, G. Chacko, J. Rodriguez, and L. Viceira, “Strategic asset allocation in a continuous-time VAR model,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28(1):2195–2214, 2004.
- [3] R.F. Engle and C.W.J. Granger, “Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing,” *Econometrica*, 55(2):251–276, 1987.
- [4] F. Herzog, G. Dondi, H. Geering, and L. Schumann, “Continuous-time multivariate strategic asset allocation,” Working paper, 2004.
- [5] S. Johansen, “Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models,” *Econometrica*, 59(6):1551–1580, 1991.
- [6] S-J Kim, J. Primbs, and S. Boyd, “Dynamic Spread Trading”, *Submitted*.
- [7] 川崎, “Johansen の共和分検定について”, 日本銀行金融研究所「金融研究」第 11 巻第 2 号, pp. 99–120, 1992.
- [8] H.M. Markowitz, “Portfolio Selection,” *Journal of Finance* 7(1), 77–91, 1952.
- [9] S. Mudchanatongsuk, J.A. Primbs, and W. Wong, “Optimal Pairs Trading: A Stochastic Control Approach,” *Proceedings of the American Control Conference*, Seattle, WA, pp. 1035-1039, June 2008.
- [10] G. Uhlenbeck and L. Ornstein, “On the theory of Brownian motion,” *Physical Review*, 36(5):823–841, 1930.
- [11] G. Vidyamurthy, *Pairs Trading: Quantitative Methods and Analysis*, Wiley, 2004.