〈研究論文〉

数学的対象の美的性質を捉える方法に関する研究

──「多様における統一」原理に基づく理論的考察──

花　園　隼　人

〈研究論文〉

数学的対象の美的性質を捉える方法に関する研究

――「多様における統一」原理に基づく理論的考察――

花　園　隼　人

1．はじめに

1.1　問題の所在と研究目的

Poincaré（1908/2003）が数学の発見における数学的対象の美的性質を識別することの重要性に言及して以来，数学教育研究では数学の創造と数学的対象の美的性質の追求との関係に注意が向けられてきた。例えば，Silver & Metzger（1989）は，数学者による数学的問題解決過程の分析を通して，数学的対象の美的性質を追求することが，問題解決のガイドになることを実証した。また，Sinclair（2004）は，数学的対象の美的性質に関する数学者による言明を整理し，Silver & Metzger の知見を支持した。そして Sinclair（2006）は，Silver & Metzger が示したものと同質なガイドを，中学校段階の学習者による数学的探究の過程に見出した。

以上の研究成果から，数学的対象の美的性質を捉えることが，数学者にとっても数学者ではない学習者にとっても重要であると示唆される。しかしながら，数学的対象の美的性質を捉える方法自体は明示されていない。それゆえに，これらの研究成果を実際の数学の研究や学習に生かすのは難しい。

よって，本稿では数学的対象の美的性質を捉える方法を解明することを研究の目的とする。

1.2　研究課題と研究方法

数学教育学において，数学的対象の美的性質を捉える方法についての議論は十分になされていない。花園（2016）は，美的性質を備えていると想定される数学的解法の美的性質を捉える方法を提案したが，この方法は限定的で，適用範囲が狭い。

このように数学的対象の美的性質に関する研究が進展しない要因の一つとして，数学的対象の美的性質の規定困難性及びその困難性に起因する定義の多義性が考えられる。実際，Silver & Metzger は数学的対象の美的性質を無定義で用いており，Sinclair（2006）は主観的な性質として捉え，意図的に基準を規定していない。しかしながら，数学的対象に基づかずに美的性質を捉えると，美的性質の追求が数学の創造に寄与しないものになりうる。なぜなら，学習者が美しいと感じる性質は，数学者が感じている数学的対象の美的性質と同質であるとは限らないためである（Brown, 1973）。

そこで本稿では，次の二つを主たる研究課題とする。第一に，数学的対象の美的性質を捉える方法についての考察に先立ち，数学的対象に関連づけてその美的性質を捉える枠組みを提示する。そして第二に，その枠組みに基づいて，数学的対象の美的性質を捉える方法を解明する。

以上の研究課題は，美学における竹内（1979）の「多様における統一」原理による理論を基盤とする理論的方法によって行う。竹内の理論を研究の基盤とする理由は，主として次の二つである。第一に，竹内が原理としている「多様における統一」は，美的性質から切り離せない特質である主観性を認めながらも，知覚対象に備わる性質に基づいて，その美的性質を捉えるものだからである。そして第二に，竹内は「多様における統一」を原理として，体系的な理論を

筑波大学　人間総合科学研究科　学校教育学専攻

展開しているためである。

本稿では，第2章において理論的基盤となる竹内の理論を整理し，第3章と第4章において数学的対象の美的性質を捉える枠組みと捉える方法をそれぞれ論じる。そして，第5章では，導出した方法の具体的な数学的対象への適用を通して，この方法の評価を行う。

2.「多様における統一」原理に基づく美的性質を捉える過程

本稿では，竹内（1979）の「多様における統一」原理による理論に基づいた考察を行う。竹内によると，「多様における統一」は，「多様なものをその具体相において生かしつつ，その変化を通じて一貫するものを顕現させ，多様そのもののうちに統一を支配させる」（p. 110）ことによって美的性質をもたらす原理である。知覚対象に「多様における統一」が成立することで，異なるものの「全体を一目瞭然とみわたし，みとおすことができる」（p. 109）ようになり，美的性質がもたらされると説明される。

以下では，「多様における統一」原理に基づいて美を捉える立場の優位性について説明した後，竹内による理論の整理を行う。

2.1 「多様における統一」原理に基づく美的性質の規定の優位性

「美とは何か」は美学の中心的テーマの一つであり，歴史上様々に説明されてきた。佐々木（1995）は，美学史上の美の概念を，「美の所在」（p. 12）を観点として概観し，次の三つの規定を抽出した。

第一の規定は，「対象の特質から美を規定しようとする」（p. 14）ものであり，「客観的規定」（p. 13）と呼ばれる。佐々木はこの規定の代表として，弦楽器の弦の長さなどについての比例関係に基づいて美を捉える比例説を挙げている。この説は，美が「数比によって表現されている点できわめて客観的な性格をもっている」（p. 14）とされる。

第二の規定は，「美しい対象の特徴を規定するのではなく，それを経験する心の特質によって美を定義しようとする」（p. 14）ものであり，「主観的規定」（p. 14）と呼ばれる。この規定では，知覚主体による特定の態度を誘引する対象を，美と定めている。佐々木はこの規定に対し，

> 確かに，静観的な態度は，その態度そのものが満足を与えるところがあり，ゆるやかな意味でなら，何を見ても美しい，ということがありうる。…実は美のほうがわれわれに静観的な態度を取らせているのだということを見失ったところから生まれたもの，と考えられる。
>
> （佐々木，1995，p. 14）

と評し，批判的に捉えている。

そして，第三に，以上の二つの規定の「中間的な性格をもった規定」（p. 15）として，「多様における統一」に代表される規定を挙げている。

この「多様における統一」原理では，「多様も統一もわれわれの知覚の函数としてしか認知できない客観的特徴」（p. 15）として，「多様」と「統一」が説明される。この「われわれの知覚の函数としてしか認知できない」という言説は，「多様」と「統一」が知覚主体に依存して捉えられるものであることの説明と捉えられる。また，「多様」や「統一」が「客観的特徴」であるとは，先述の「客観的規定」の説明と同様に，これらが知覚対象の特質であることを指しているものと考えられる。すなわち，「多様における統一」原理に基づく美の規定では，「客観的規定」のように知覚対象の特性に基づきながら，「主観的規定」のように知覚主体の判断に依存して，知覚対象の美的性質が捉えられている。佐々木は，このような知覚主体と知覚対象の両面からの美の規定について，「客観的な規定でありながら，主観の経験のなかで捉えられた特質を対象の側に投影したもので，実はかなり有力な観点である」（p. 15）と評し，支持している。

佐々木はこのように「多様における統一」に基づく規定を評価しつつも，「辞典」としての特性上，この「多様における統一」に特化した論を展開していない。それゆえ，以降では，「多様

における統一」を原理として体系的な理論を展開しており，佐々木が「多様における統一」の説明で引用している竹内（1979）に基づいて考察する。

2.2 「多様における統一」をもたらす形式

2.2.1 「合法則的形式」の規定と機能

竹内（1979）は「多様における統一」をもたらす知覚対象の構成方式を形式[1]と称した。そして，合理的に「多様における統一」をもたらす構成要素の間の規則として「合法則的形式」を定め，ハーモニまたは調和，リズム，シンメトリ，プロポーション等を挙げた（p. 110）。これら「合法則的形式」が知覚対象に備わることで，「それぞれ調子や強度や方向や数量において相違しまたは対立する構成要素のあいだにまた共通しあるいは和合するところがあって，多様のうちに統一がたもたれる」（p. 110）とされる。

これらの具体的な「合法則的形式」は，「本来はそれぞれ一定範囲の諸芸術に属するものでありながら，往々類比的意味では他の領域へ転化される」（p. 291）ものとされる。すなわち，シンメトリなどの例は，特定の芸術領域に限定されて用いられる構成方式ではなく，多岐にわたって用いられるという点で，それぞれが「合法則的形式」の類型の特徴を表したものになっていると捉えられる。

また，具体的な「合法則的形式」は，「諸芸術にわたって作品の諸構成要素の同時的あるいは継起的結合関係を規定するものであるが，いずれも結局は多様における統一に還元される」（p. 290）であり，「根本的に相関連する」（p. 291）ものとされる。このことから，シンメトリなどと表現される各類型は，互いに排反の関係とされていないことがわかる。

以上より，「合法則的形式」はその諸類型を個別に捉えるよりも，総体としての「合法則的形式」を捉える方が有意義である。その際，竹内による規定に含まれている「合理的に『多様における統一』をもたらす」という機能が，知覚対象の「それぞれ調子や強度や方向や数量において相違しまたは対立する構成要素のあいだに」，「共通しあるいは和合するところ」をもたらし，「多様のうちに統一」をたもたせるというものであると捉え，その機序をより明確にするために次のように表現することとする。すなわち，「知覚対象の異なる構成要素の間に統一をもたらす規則」として，「合法則的形式」を捉えることとする。

2.2.2 「個性化的形式」の規定と機能

前項で説明した「合法則的形式」は，詳しくは次節で述べるように，自然や芸術作品から美的性質を見出す際の視点であるだけでなく，芸術作品を形成する原理でもある。竹内（1979）は，これらの過程が「合法則的形式」のみに基づいて行われるのではなく，「合法則的形式」が，次に述べる二重の「主体的個性化の原理」（p. 111）によって個性化された，「個性化的形式」にも従うとしている。

第一の「主体的個性化の原理」は，「人格的個性の法則」と呼ばれる原理である。この法則では，「合法則的形式」が「個人的人格にもとづいて分化する各自に固有の観かた，感じかた，把握のしかたにしたがって，さまざまに変容され，おおかれすくなかれ自由化され」（p. 111）る。

第二の「主体的個性化の原理」は，「歴史的個性の法則」と呼ばれる原理である。この法則では，人格的個性の「背後にあってそれをにない，ささえる世代や時期や時代，種族や民族，職業や階級など」（p. 111）によって，「合法則的形式」が自由化される。

これら二重の原理によって個性化される前の「合法則的形式」は，美を「客観的規定」によって捉える立場の一つである「形式主義」において，美の基準とされるものである。対照的に，この「個性化的形式」は竹内の「多様における統一」原理における美の主観性を保証するものであり，竹内は次のように形式主義との差異を明示している。

> 形式主義の美学によって強調されたような美の普遍的妥当的形式原理はこの二重の主体的個性化の原理をはなれて絶対的権威を有するとはみとめられず，これと提携し協

同してはじめて美的意義を全うすることができる。（竹内，1979，p. 111）[2]

また，この美の主観性に関連して，竹内は，同一の知覚対象を異なる人が観照した場合に感得される美的性質が「いくらかずつ相異なったものとなる」（p. 295）ことや，「複数の作者が同じ媒材をもって同じ題材を扱っても，唯一不二のたがいに置換できないものとなる」（p. 295）ことを，この「個性化的形式」の差異で説明している。

以上のように「個性化的形式」は，竹内の「多様における統一」原理に基づく美の主観性の説明の鍵概念であるが，この主観性は無規則なものではない。このことについて竹内は，

同一の芸術家に属するものの間にはその全体を通じて一貫する形式特徴がみいだされ，一つの時代において一つの民族に属する諸作家の諸作品のあいだにもまた共通の特徴をもった形式が支配している
（竹内，1979，p. 295）

ゆえに，芸術作品の形成活動の所産は，「ほしいままにその都度ちがった形式」（p. 295）をとるものではないと説明する。すなわち，「人格的個性」及び「歴史的個性」のそれぞれに，何らかの一貫性が存在していると捉えられる。そしてこの一貫性によって，

同一主体の諸作品は，相互間の多様な変異にもかかわらず，これをこえて一定の形式で構成されたものとなり，それらすべてにわたって一定の形成類型としての様式をそなえたもの（竹内，1979，p. 295）

になるとされる。シンメトリや比例を重視する古典主義や，古典主義の対概念とされる浪漫主義といった様式は，それぞれ「個性化的形式」が「作品に客観化されたもの」（p. 296）である。

以上を整理し，本稿では「個性化的形式」を次のように捉える。すなわち，「『人格的個性の法則』及び『歴史的個性の法則』という二重の『主体的個性化の原理』によって個性化された，知覚対象の異なる構成要素間に統一をもたらす規則」とする。

2.3 「多様における統一」原理に基づく美的性質を捉える過程

美学では，美の感得に関する過程を美的体験と称している。竹内（1979）はこの美的体験を，次の三段階に分けて捉えている。

第一の段階は，自然美を感得する「自然美的観照」である。第二の段階は，感得された自然美を芸術作品として創作する「芸術創作」である。そして最後が，芸術作品として形成された芸術美を感得する「芸術美的観照」である。

竹内は，これら美的体験の三段階に共通する局面として，次の三つを挙げている。

第一の局面は，知覚対象の全体像を捉えつつ，さらにその対象の本質を捉える局面である「美的静観」である。この局面では直観がはたらくとされ，この直観がはたらくためには，知覚対象に対する「無関心性」が必要になるとされる。この「無関心性」とは，知覚対象を観る際に「『利害関心をもっている interessiert an』ことがない，あるいは『私欲に囚われていない uninteressiert』」（佐々木，1995, p. 183）と説明される。例えば，食欲を満たしたい人がリンゴを見ても，リンゴの美的性質は感得できない。

第二は，「美的交感」と呼ばれる局面である。この局面は，自然美を対象とする際には，知覚対象の色や形から感情を読み取ることや，大自然の中に自身を位置づけて大自然との一体感を得ることを指す。そして芸術美を対象とする際には，作者が芸術作品に込めた感情を読み取ることや，作者の感性に共感することを指す。

第三の局面は，第一の局面で得られた全体像と本質や第二の局面で得られた感情に対して形式を与える，「形成活動」の局面である。この「形成活動」の局面を通して，直観や感性はさらに洗練され，美的性質が得られると説明される。

美的体験の第一段階である「自然美的観照」と最終段階である「芸術美的観照」では，「美的

静観」と「美的交感」の局面が強調される一方で,「形成活動」も行われる。「自然美的観照」では知覚対象に不完全ながらも形式を見出すことが「前芸術的形成」(竹内, 1979, p. 132) と呼ばれ,「芸術美的観照」では観照者が内面で芸術作品を再構成することが「追形成」(竹内, 1979, p. 205) と呼ばれる。他方,「芸術創作」の段階では「形成活動」が強調され,「美的静観」と「美的交感」の役割は衰退する。しかし,創作過程において,感得された自然美を振り返るためにこの二つの局面が繰り返されることもあることから,「芸術創作」の段階もこの二つの局面と切り離すことはできないとされる。

3. 数学的対象の美的性質を捉える枠組み

以上の竹内 (1979) の理論の整理から,「多様における統一」原理に基づく美的性質をもたらす知覚対象の特質は,「合法則的形式」と「個性化的形式」として捉えられることがわかった。以下ではこれらの形式を数学的対象から抽出するために,それぞれの形式と見なせる数学的な特質を具体的に挙げ,それらの共通点を探る。

3.1 数学的対象の「合法則的形式」の概念規定

本稿では竹内 (1979) の「合法則的形式」を,「知覚対象の異なる構成要素の間に統一をもたらす規則」と捉えた。ここではじめに,竹内が「合法則的形式」の例として挙げたシンメトリ,プロポーションから類推し,対称性と比例[(3)]について考察する。

まず,対称性は,線対称や面対称,点対称などに代表されるような幾何学的な性質として,次のように説明される関係概念である。

> ある図形の対称性とは,その図形を不変に保つ変換のことである。ここで不変に保つとは,この図形上の個々の点がその変換で別の点に移ったとしても,全体としてみると,変換の前後で図形が変わらないということを意味する。 (Devlin, 1994, p. 146)

この Devlin による定義に従うと,対称性は変換,すなわちある集合 A から自分自身への写像の一つとして定義される。写像は関係概念なので,集合 A の構成要素間の関係を表す規則であると言える。また,「全体としてみると,変換の前後で図形が変わらない」ことで,変換の前後の間の統一が成立している。すなわち,数学的対象がもつ性質としての対称性も,「合法則的形式」の一つである。

Devlin による定義は,数学的対象を図形に限定していたが,代数的な式を数学的対象としても,同様に「合法則的形式」と考えることができる。実際,基本対称式 $a+b$ に見られるような記号間の交換可能性は「代数的な対称性」(Devlin, 1994, p. 151) と呼ばれる。よって本稿においても,対称性をもつ数学的対象を,図形と代数的な式の双方で捉える。

次に,比例は,「同じ比をもつ2量は比例するといわれる」(中村ら, 1996, p. 93) と定義される関係概念である。ここで比とは「同種の二つの量の間の大きさに関するある種の関係」(中村ら, 1996) であるので,比例の定義における「同じ比をもつ2量」は,それぞれが順序対である。すなわち,二つの量 (a, b) の比を $a:b$ で表すと,2量 (a, b) と (c, d) が比例であるとは,$a:b=c:d$ と表すことができる。また,比例を集合 X と Y の関係概念として捉えると,$\forall x \in X$ と x に対応する $y \in Y$ について,比 $x:y$ が一定であるような関係と定義することもできる。このどちらの定義においても,2量が比例関係である場合には,それらの間に「比が一定」という統一性が成立している。よって,比例も「合法則的形式」の一つである。

以上で「合法則的形式」として捉えられることが確認された対称性と比例は,いずれも反射律と対称律,推移率をそれぞれ満たす数学的な同値関係であるという共通性をもつ。逆に,数学的対象の構成要素間にある同値関係が成立する場合,その同値関係は数学的対象の異なる構成要素の間に同値という統一をもたらす規則であるので,「合法則的形式」であると言える。そこで,本研究における数学的対象の「合法則的形式」を,数学的対象の構成要素間の同値関係

として定める。

上述の定義に基づくと，例えばSteen（1990）が「数学の体系の根源をなすもの」(p.3）として挙げたもののうち，線形性，周期性，相似，再帰といった関係概念も，以下のように数学的対象の「合法則的形式」と捉えることができる。

[線形性] 線形性は恒等写像について成立するので反射律をみたす。また，線形写像が逆写像をもてば，その逆写像も線形写像なので対称律をみたす。そして，集合 X, Y, Z において X から Y への写像 f と Y から Z への写像 g がともに線形写像である場合，合成写像 $g \circ f$ も線形写像であるので推移律もみたす。すなわち，写像としての関係が全単射である場合には，線形性は同値関係である。先述の比例は，この場合の線形性の下位概念である。

[周期性] fが基本周期 k をもつ場合，$f(x)$と$f(x+k)$の間には同値関係が成立する。すなわち，$f(x)=f(x+k)$である。

[相似] 図形 F_1, F_2, F_3 について相似を$\backsim$と表すと，（反射律）$F_1 \backsim F_1$，（対称律）$F_1 \backsim F_2 \Rightarrow F_2 \backsim F_1$，（推移律）$F_1 \backsim F_2, F_2 \backsim F_3 \Rightarrow F_1 \backsim F_3$ を全て満たす。ただし相似は，次のように比例を用いて定義することもできる。すなわち，kを定数として，F_1 上の任意の点 P_1 と，点 P_1 に対応する P_2 上の点 P_2 との間に，常に $\overrightarrow{OP_1} = k\overrightarrow{OP_2}$ となる点 O が存在することを，F_1 と F_2 が相似であると捉えることができる。よって本研究においては，この相似という形式を，比例に含めることとする。

[再帰] Kilpatrick（1986）は，再帰には一般的に受け入れられた意味がないとした上で，最も興味深い特徴として「自己参照 self-referential」(p.9）という側面を挙げている。この「自己参照」とは，フラクタル図形に見られる自己相似性や，数列の漸化式による定義などに見られる，入れ子状の構造のことである。例えば，$n \in \mathbb{N}$ について，$n! \overset{\mathrm{def}}{=} n \cdot (n-1)!$ と定義する際に，右辺においても自然数の階乗が現れている構造のことである。ここで右辺には $n!$ そのものが用いられているわけではないので循環論法とは異なる。しかし，どちらも「自然数の階乗」という意味は等しい。すなわちこの意味では，

$$[\text{自然数の階乗}] \overset{\mathrm{def}}{=} n \cdot [\text{自然数の階乗}]$$

となっている。より一般に，参照する自己をS，参照される自己を$(S)'$と表し，これらが意味の上では等しいという関係を $\sim$ とすれば，（反射律）$S \sim S$，（対称律）$S \sim (S)' \Rightarrow (S)' \sim S$，（推移律）$S \sim (S)', (S)' \sim ((S)') \Rightarrow S \sim ((S)')'$ が満たされるので，再帰も同値関係である。

本稿では，ここまでで数学的対象の「合法則的形式」として，対称性，比例，線形性，周期性，再帰の五つの同値関係を挙げた。その過程で比例に相似を含めたが，線形性と比例のように，この五つは互いに排反ではない。また，数学における同値関係はこの五つに限定されるものではないので，数学的対象の「合法則的形式」もこれらに限定されるものではない。

3.2　数学的対象の「個性化的形式」の概念規定

竹内（1979）による「合法則的形式」と「個性化的形式」の関係に基づくと，数学的対象の「個性化的形式」は，数学的対象の「合法則的形式」を自由化したものと捉えられるが，この「自由化」という操作は明確ではない。そこでここでは，「個性化的形式」が「様式」を生むことから考察を始める。

Le Lionnais（1962/1971）は，「数学における美」を捉える基準の一つに，「人間のもつ美のコンセプションに関するもの」(p. 122）として「古典主義」と「浪漫主義」を用いた。ここで「古典主義」は「エレガントや荘厳さで満ちた」(p. 123）様式であり，「その簡素さや差異を覆う統制」(p. 124）などによって感動を与えられるときに，数学的対象に美が備わるとする考え方である。一方，「浪漫主義」は「際立った効果を喜び，激情を熱望する」(p. 123）様式であり，「その基本的な原理は激しい感情や不調和，奇抜さへの賛美」(p. 130）であるとされる。

Le Lionnais によるこの「古典主義」と「浪漫主義」への区別は独特であり，「浪漫主義」的な「数学における美」についての言及は他に見られない。実際，Le Lionnais が「浪漫主義」に含めた背理法を用いる$\sqrt{2}$が無理数であること

の証明に対し，Hardy（1956/1992）は，「使われている道具は幼稚なほど単純」（p. 113）と評価している。この「単純性」は，Le Lionnais の「古典主義」における「簡素性」と強く関連する性質であると捉えられる。

以上から，本稿においては，Le Lionnais の「浪漫主義」的な美的性質の存在の検討は保留し，「古典主義」的な美的性質についてさらに考察する。

Le Lionnais の「古典主義」は「荘厳性」や「簡素性」などが重視される様式であった。しかし，何をもって荘厳か，何をもって簡素かなどといった基準については，Le Lionnais は議論していない。

Wells（1990）は，このような性質についての基準が，数学に携わることが想定される人々の間でも主観的で文脈依存的であることを，数学雑誌に投稿したアンケート調査の結果に基づいて主張した。例えば，「単純性（simplicity）と簡潔性（brevity）ほど頻繁に美と結びつけられる基準はない」（p. 39）としながら，単純な数学の定理として実際に選んだ定理が人によって様々であったことから，これらの性質が主観的であると主張した。

この Wells の知見を踏まえると，数学に携わる人々は，個人レベルでは異なる「単純性」や「簡潔性」を捉えていながらも，この人々全体でいえば，「単純性」や「簡潔性」を数学的対象の美的性質と結びつけていると考えられる。換言すると，「単純性」や「簡潔性」は，竹内（1979）の「人格的個性」としては異なる捉え方をされながらも，「歴史的個性」としては数学的対象の美的性質と結びつけられうると考えられる。実際，Dreyfus and Eisenberg（1986）は，数学的解法の論理の段階の少なさや段階の幅の小ささとしての「簡潔性（brevity）」を，数学的対象の美的性質の基準の一つとして挙げた。その上で，考察対象が単純で明瞭で簡潔になることによって，対称性などの「構造」を捉えられるようになると説明した。ここで「構造」とされているものとして，他に比例が挙げられているが，これらは本稿における数学的対象の「合法則的形式」と考えられるものである。また，数学的解法の「論理の段階の少なさや段階の幅の小ささ」は，数学的対象である数学的解法における，論理という構成要素に関する規則である。

すなわち，「人格的個性」にとっては多様な「単純性」や「簡潔性」をもたらす数学的対象の構成要素の構成方式は，それらを捉えることが「合法則的形式」を捉えることにつながりうるものであり，「多様における統一原理」に基づく美的性質を捉えることにつながりうるものである。

以上より，本稿では数学的対象の「個性化的形式」を，「単純性」や「簡潔性」などの主観的な性質をもたらす数学的対象の構成要素間の規則と定める。

3.3　数学的対象の美的性質を捉える枠組み

ここまでの考察を踏まえ，本研究では美的性質をもたらす数学的対象の「形式[4]」を，上述の「合法則的形式」と「個性化的形式」の二つで捉える。すなわち，前者は「数学的対象の構成要素間に成立する同値関係」として，後者を「『単純性』や『簡潔性』といった主観的な性質をもたらす数学的対象の構成要素間の規則」と定める。そして，数学的対象の美的性質を，数学的対象の「形式」によってもたらされる統一性と定める。

数学的対象の美的性質の規定は，本稿においても挙げてきたように，多くの数学教育研究で様々になされてきた。例えば，Hardy（1956/1992）は数学者が共有している基準として「経済性」や「意外性」などのリストを提示した。また，Dreyfus & Eisenberg（1986）は Hardy のリストに基づいて，新たに「簡潔性」や「構造」などの基準を加えたリストを提示した。これらに対し，Sinclair（2006）は，Wells（1990）の知見に基づき，数学的対象の美的性質が主観的で文脈依存的であると判断し，「ぴったり合う感覚」（p. 40）によって美的性質を規定した。

以上の規定は，Wells の知見に基づけば，Hardy の挙げた基準や，Dreyfus & Eisenberg が挙げた「構造」以外の基準はいずれも主観的

であるので，本稿における「個性化的形式」によってもたらされる性質であると捉えられる。また，Sinclairの規定も，「個性化的形式」によってもたらされる性質を，美的性質としたものと捉えられる。

一方，Dreyfus & Eisenbergの「構造」は本稿における「合法則的形式」と同一視できるものであるので，「構造」によってもたらされる美的性質は，本稿における「合法則的形式」によってもたらされる美的性質であると捉えられる。

以上のように，本稿における数学的対象の「形式」に基づく美的性質の規定は，数学教育研究で多様になされた美的性質の規定を網羅的に捉えられるものである。

4．数学的対象の美的性質を捉える方法

4.1　数学的対象の美的性質を捉える過程

4.1.1　美的体験の段階と数学の探究過程の関係

竹内（1979）の立場から美的体験を捉え，「芸術創作」の段階を数学的対象の美的性質を構成する段階と捉えると，「自然美的観照」と「芸術美的観照」は次のように数学の探究過程と関連づけられる。

まず，「自然美的観照」は，人為的な「形成活動」を経ていない対象の美的性質を感得する段階なので，美的性質が顕在的ではない数学的対象に対し，その美的性質を見出す段階として位置付けられる。そして「芸術美的観照」は，「芸術創作」を経た数学的対象に対し，その美的性質を感得する段階として位置付けられる。

この位置付けを数学的問題解決過程と照合すると，一先ずの解決の見通しがたった段階または解が得られた段階において，その解法や解を対象とした「自然美的観照」が行われ，新たに解法や解の美的性質が追求されると言える。このように数学的問題解決過程の「振り返りの相」(Polya, 1988/2004）において，数学的対象の美的性質の追求や感得が行われることは，数学的問題解決過程における審美のはたらきを考察した先行研究の知見とも一致している（Dreyfus and Eisenberg, 1986; Silver & Metzger, 1989; Sinclair, 2004)。また，「解の見通しまたは解が得られた段階」では，「問題を解く」という目的が一応は達成されていることから，「無関心性」の状態で数学的対象を考察しうると言える。

本稿の目的は，数学の創造に寄与するような，数学的対象の美的性質を捉える方法を解明することである。この「数学の創造」は「芸術創作」の段階で行われると考えると，本稿の目的に合致する過程は，「自然美的観照」に対応する過程であると言える。そこで以下では，この「自然美的観照」に対応する過程に焦点を当てた考察を行う。

4.1.2　美的体験の局面と数学の探究過程の関係

美的体験の各段階における三局面は，数学の探究過程と次のように関連づけられる。

まず，「美的静観」は，数学的対象の全体を捉えるとともに，その本質を捉える局面として位置付けられる。杉山（1992）は教育学者である篠原助市の考えに基づき，直観を「『見る』といったときに，感覚でとらえるだけでなく，その個，具体物の中に全体を見たり，関係を見たり，法則を見たりすること」(p. 38）とし，「内在する本質や関係，法則を見通す力，それが直観力である。」(p. 38）とした。そして，この全体や本質，法則といった，目に見えないものを見る過程では論理もはたらくことを説明した。すなわち，数学的対象の「全体を捉えること」及び「本質を捉えること」は，直観と論理のはたらきによって得られることの一つと捉えられる。

杉山（1992）は関係や法則，本質を具体的に示さなかったが，杉山（1986）は直観によって「いくつかの事象に共通している性質」(p. 80）が得られること，及びその性質の「根拠（原理）を探る」(p. 81）ことによって，公理や原理及び公理の組合せである構造が得られると述べた。そして，具体的な題材を用いて，比例がこの原理の一つになることを例示した。

この例を踏まえると，数学的対象の「合法則的形式」は直観と論理で得られる本質の一つと捉えられる。ただし，数学教育における直観や本質という語の用法は，本稿の用法に限定されるものではなく(5)，直観から得られるものも本質に限定されない。

そこで本稿では，「合法則的形式」と同一視できる本質を「本質」と表す。また，「合法則的形式」が成立している数学的対象の全体を「全体」と表す。

続いて，「美的交感」について述べる。まず，「自然美的観照」における「美的交感」のように，数学的対象から感情を読み取ったり，大自然に自身を位置付けたりするといった局面について詳察した数学教育研究は，管見の限りない。ただし，Brown and Walter（1969）が，次項で述べる What-If-Not 方略を用いる過程で抱いた，「われわれは，ここで座して論文を書きながら，新しいジオボードのアイディアと属性の相互作用が，果てのない深淵から無限に長い論文によって自分たちを見つけるようなものであるということに，恐れを抱き始めた。」（p. 39）という感情は，What-If-Not 方略によって広がった数学的対象の広大さに由来するものと考えられる。それゆえ，「自然美的観照」における「美的交感」を，「数学的対象の広大さを感じる」局面として位置付ける。

4.1.3　数学的対象の美的性質を捉える過程

以上をまとめると，数学的対象の美的性質を捉えるためには，「数学的対象の『全体』と『形式』を同定する」一方で，「数学的対象の広大さを感じる」といった過程[6]を経る必要がある。そこで以下では，これらの過程を遂行する方法について考察する。

4.2　数学的対象の美的性質を捉える方法

4.2.1　数学的対象の「全体」と「合法則的形式」を捉える方法

数学的対象の「全体」を捉えるためには，その数学的対象ではないものとの関係を考えることが有効である。Brown（1974）は，数学的対象の理解を内的理解と外的理解に分け，次のように定義した。

> X を内的に理解するとは，X 自身の内部における関連を見ることである。X を外的に理解するとは，X を一つの全体と考えて，それが異なるものとどう関係しているかを見ることである。　　（Brown, 1974, p. 27)

そして，Brown and Walter（2005）はこの外的理解を得るための方略として，What-If-Not 方略を提案した。この方略は，数学的対象の属性をリスト化し，この属性に対し「What if not?（そうでなければどうなるか）」と問うことで新たな問題を設定し，その問題を解決することで「そうでない場合」との関係を得るものである。

この What-If-Not 方略で得られる「そうでないもの」は，X を含む集合を拡張した集合に含まれる要素 X'として考えれられる場合と，X を含まない集合の要素 Y として考えられる場合がある。例えば Brown & Walter は，「二つの正三角形の面積の和と等しい面積をもつ正三角形」を求める際，ピタゴラスの定理で直角三角形の辺上にある正方形に対して「What if not?」と問うた。そして正方形を，半円のように相似な図形と，相似でない図形に変えた場合を示した。ここでは，相似な図形が X'，相似でない図形が Yと捉えられていると考えられる。

この例において，X を一つの全体と捉えることとは X と X' 及び Y との関係，すなわち X の外的理解を得ることに寄与しているが，その結果として X と X' を同じ集合の要素，ここではともに相似な図形と捉えることで，数学的対象の新たな全体を捉えている。この新たな全体は，相似または比例という「合法則的形式」が成立する全体であるので，本稿で定めた数学的対象の「全体」となっている。

この数学的対象の「全体」を捉える一連の過程を振り返ると，ある数学的対象に What-If-Not 方略を用いることは，その数学的対象の「合法則的形式」と「全体」の双方を捉えることに寄与していた。特に，数学的対象 X を含む集合を拡張した集合に含まれる要素 X' との関係を考えることが，「合法則的形式」と「全体」を捉える上で決定的であった。ただし，先の X' と Y の区別は結果的に得られている。「X ではないもの」から X' を得るためには，あらかじめ「合法則的形式」の探究を目的として What-If-Not

方略を用いる必要がある。このように「合法則的形式」を探究することは,「自然美的観照」における「前芸術的形成」に通じるものである。

以上から,「合法則的形式」が顕在的でない数学的対象の「全体」と「合法則的形式」を捉える方法を,「合法則的形式」を探究する What-If-Not 方略として同定する。

4.2.2 数学的対象の広大さを感じる方法

先述のように,Brown & Walter (1969) は What-If-Not 方略を用いる中で,考察している数学的対象の広大さを感じ取ったと考えられる。実際,What-If-Not 方略は数学的対象の属性のうち「定数」とされていたものを「変数」と見直す考え方なので,その「変数」が代表する集合の分だけ数学的対象に広がりがもたらされる。

この広がりは,上述の「合法則的形式」を探究する What-If-Not 方略でも十分に得られると考える。よって,「数学的対象の広大さを感じる」方法についても,「合法則的形式」を想定した What-If-Not 方略として同定する。

5. 数学的対象の美的性質を捉える方法の評価

5.1 数学的対象の美的性質を捉える方法の適用

5.1.1 分析の目的

美的性質をもつ数学的対象とされながらもその美的性質を捉える過程が必ずしも明示的でない数学的対象に対して,本稿で導出した方法を適用することによって,この方法の評価を行う。さらに,分析対象となった数学的対象の美的性質が得られる過程を解明する。

5.1.2 分析対象:「道のりが等しくなる図形」

図1のように,AC= BC の二等辺三角形 ABC の底辺 BC 上に点 D をとり,AC と BC 上に AP=PD,DQ=QB となる点 P,Q をとる。このとき,二つの道のり①「A→C→B」と②「A→P→D→Q→B」は等しくなる。

この「道のりが等しくなる」という結果は次のように初等幾何的に証明できる。

△ABC,△ADP,△DBQ について,AC=AB,AP=DP,DQ=BQ であるので,∠PDA=∠PAD=∠CAB=∠CBA=∠QBD=∠QDB. 同位角が等しいので,

$$CA \parallel QD, CB \parallel PD$$

よって,四角形 CPDQ は平行四辺形なので,

$$CP=QD, CQ=PD$$

以上より,二つの道のり①と②は等しい。

和田 (2007) は三つの二等辺三角形 ABC,ADP,DBQ の相似及び辺の長さの比例に着目してこの結果を説明した。そして図2のように円の場合でも同様な結果になることを示し,比例を用いるきれいさを説明した。しかし,この数学的対象から比例という「形式」を同定する過程や,数学の広がりを感じる過程については触れられていない。

和田と同様に,杉山 (1986) は三つの二等辺三角形△ABC,△ADP,△DBQ の相似及び辺の長さの比例に着目してこの結果を説明した。そして円についても同様に説明できることを示した。ただし,ここで杉山は,証明の「根拠を明らかにし,本質を明らかにすること,および,その本質的なことがらをもとに,可能な発展を求めること」(p. 153) が主体的な学習の基本であることを説明するためにこの例を用いており,この図形の美的性質には触れていない。

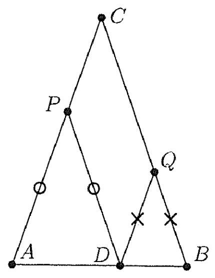

図1 等長な二等辺三角形

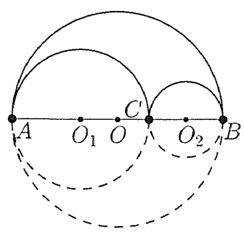

図2 道のりが等しくなる図形(円)

5.1.3 「道のりが等しくなる図形」の分析

はじめに,「合法則的形式」が明らかになっていない状態，すなわち「道のりが等しくなる」という結果が比例に基づいて説明されていない状態から，この数学的対象の美的性質を捉える。

この「道のりが等しくなる図形」という数学的対象に対し,「合法則的形式」を探究する What-If-Not 方略を用いる。例えば，図１の二等辺三角形 ADP, DBQ の頂点Ｐ，Ｑが，二等辺三角形 ABC の内部にある場合を考える（図３)。

この場合，道のり①「A→C→B」と②「A→P→D→Q→B」では①>②になっている。すなわち，内部の図形が二等辺三角形であることは，道のりが等しくなることに効いていない。

そこで証明を振り返ると，二等辺三角形であることから派生した，∠PDA＝∠PAD＝∠CAB＝∠CBA＝∠QBD＝∠QDB であることが効いていることがわかる。よって，この条件を次のように保存して，図４の長方形の場合を考える。

図４では，先の角についての条件を，∠REA＝∠PAE＝∠DAB＝∠CBA＝∠QBE＝∠SEB として保存している。この図においては DP≠SE となっており，二つの道のり①'「A→D→C→B」と②'「A→P→R→E→S→Q→B」が等しくなっていない。一方，図５のように DP＝SE, AP＝CQ となっている場合には，①'＝②'となっている。

この図５は，二等辺三角形の場合の証明において，平行四辺形の性質として用いた「対辺が等長である」という条件を満たすものである。ただし，DP＝SE, AP＝CQ であることは①'＝②'であることそのものであるため，どのような場合に DP＝SE, AP＝CQ になるかについてさらに考察する。

図５で表される図形は「合法則的形式」が顕在化していない。そこで DP＝SE という条件をもとに対称性という「合法則的形式」を想定して，図６のような２点 E', S', R' を考える。また，対角線 AC, BD をひく。図６では，対角線の交点に関してこの図形が点対称になっている。この点対称を視点にもとの二等辺三角形の場合を振り返ると，点対称であることを用いて道のりが等しくなることが説明できるのは，長方形 ABCD 自体が点対称であることに依存していることがわかる。すなわち，この点対称を用いた説明は，図７のような平行四辺形の場合についても成立する一方で，二等辺三角形のように点対称ではない図形については，同様な説明はで

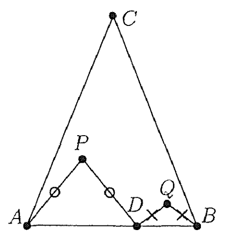

図３　等長でない二等辺三角形

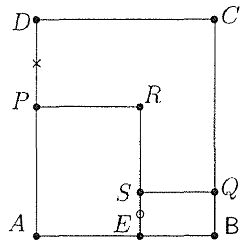

図４　等長でない長方形

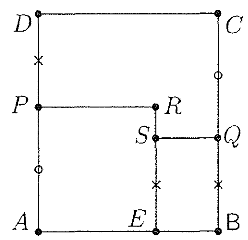

図５　等長な長方形

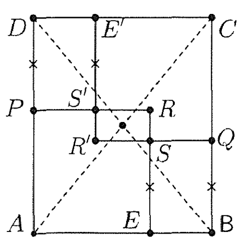

図６　等長な長方形（点対称）

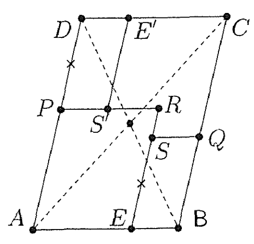

図７　等長な平行四辺形(点対称)

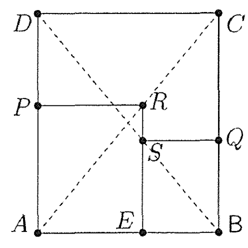

図８　長方形（比例）

きない。

そこで，この点対称な場合の特殊として2点R, Sが対角線上にある場合を考える（図8）。このとき，三つの四角形ABCD, AERP, EBQSは互いに相似になっており，比例という「形式」が同定できる。この比例という「形式」は二等辺三角形の場合や図2の円の場合などにも成立することを確認することで，「道のりが等しい図形」の「全体」が捉えられる。

5.2 数学的対象の美的性質を捉える方法の評価

その美しさが論じられながらも，美的性質をもたらす「形式」を同定する過程が明確ではなかった「道のりが等しい図形」に対し，本稿で導出した「数学的対象の美的性質を捉える方法」を適用することで，「合法則的形式」と「全体」を同定する過程を解明することができた。このことは，美的体験の「美的静観」と「形成活動」に相当する局面に関しては，導出した方法が機能したことを意味する。

一方，「美的交感」に相当する局面に関しては，その効果は必ずしも明確ではない。実際，「数学的対象の広大さを感じる方法」については，数学的対象の広がりはもたらされているものの，それを広がりと感じとるかどうかは，その知覚主体に依存する。

6．まとめと今後の課題

本稿では，数学的対象の美的性質を捉える方法を解明するために，竹内（1979）の「多様における統一」原理に基づいた理論的考察を行った。

その結果，数学的対象の「形式」を視点として，数学的対象の美的性質を捉える枠組みを提示した。そしてこの枠組みと「多様における統一」原理に基づき，数学的対象の美的性質を捉える過程として，「数学的対象の『全体』と『形式』の同定」と「数学的対象の広大さを感じること」を特定した。さらに，この過程と数学教育学における理論の比較から，数学的対象の美的性質を捉える方法として，「『合法則的形式』を探究するWhat-If-Not方略」を同定した。

具体的な数学的対象をこの方法で分析した結果，数学的対象の「全体」と「形式」を同定する過程での有効性が明らかになった。しかし，その一方で，数学的対象の広大さを感じる過程での有効性は，必ずしも明確にはならなかった。

本稿では，数学的対象の美的性質を捉える過程として，「形式」が顕在化していない数学的対象の考察過程を取り上げた。このような過程は，美学における「自然美的観照」に相当する。しかしながら，本稿で示したように，美学における美的体験には，芸術作品の美的性質を観照する「芸術美的観照」もある。今後の課題は，この「芸術美的観照」に相当する過程を数学の探究過程から特定し，その過程における数学的対象の美的性質を捉える方法を同定することである。

註

（1）この形式という語について，竹内はその意味が根本的に次の二つに分類されるとしている。一方は知覚対象の内容を表現するものであり，この意味での形式を，竹内は形象と称した。そしてもう一方を，知的対象の内容及び形象の構成方式としている。以降，本稿においても竹内と同様に，構成方式という意味で形式という語を用いることにする。

（2）この引用中の「普遍妥当的形式原理」についての直接的な説明はないが，直前に「合法則的形式」を「すべての美的主体に対して妥当する普遍的形式原理」と称していることから，「合法則的形式」を指していると解釈できる。

（3）プロポーションに対応する概念としては，比例の他に比も考えられる。しかし，比は「同種の二つの量の間の大きさに関するある種の関係」（中村ら，1996, p.93）と定義され，任意の二量の大きさの関係を表すことができるものである。それゆえ比は，「二つの量」の間に統一をもたらすものではない。よって，ここでは比例に焦点を当てた。

（4）数学教育学では，註（1）で示した形式のうち，内容の対概念としての形式が注目を集めてきた（e.g. Byers & Erlwanger, 1984）。しかしこの

表現としての形式は，実際には，記数法や不等式の解決過程の表現方法を意味しており，竹内の「形象の構成方式」としての意味をもっている。竹内は概念の説明のために形象と構成方式を区別したが，このような「形象の構成方式」としての形式の捉え方は，むしろ一般的であることが指摘されている（利光, 1970)。

（5）例えば，Fischbein（1987）参照。

（6）この過程は，端的には「形式」によって数学的対象の状態を変容させるものである。それゆえ，花園（2014）が導出した数学的対象の美的性質の生起過程である，「数学を特徴付けるパターンによって，数学的対象が混沌とした状態から秩序ある状態に変容する」という過程を精緻化したものになっている。

引用・参考文献

佐々木健一（1995).『美学辞典』. 東京：東京大学出版会.

杉山吉茂（1986).『公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』. 東京：東洋館出版社.

杉山吉茂（1992).「直観と論理の役割について」. 学芸大学数学教育研究，4. pp. 35－44.

竹内敏雄（1979).『美学総論』. 東京：弘文堂.

利光功（1970).「形式」. 竹内敏雄（編）『美学事典』. 東京：弘文堂. pp. 194－196.

中村幸四郎，寺坂英孝，伊藤俊太郎，池田美恵（訳・解説）(1996).『ユークリッド原論　縮刷版』. 東京：共立出版.

花園隼人 (2014).「学校数学における『美しさ』をとらえる枠組みの構築：数学における『美しさ』の特色の分析を通して」. 筑波大学人間総合科学研究科学校教育学専攻学校教育学研究紀要，7. pp. 105－125.

花園隼人（2016).「数学教育における数学的解法の美的性質の分析：教材分析の視点の導出」. 筑波大学教育学系論集，41(1). pp. 53－65.

和田義信（2007).「第１章　なぜ算数・数学を教えるのか」. 和田義信 著作・講演集刊行会（編）『和田義信 著作・講演集３　講演集 (1) 数学と数学教育（軽装版)』. 東京：東洋館出版社. pp. 5－86.

Byers, V. & Erlwanger, S. (1984). Content and form in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 15,* 259-274.

Brown, S. I. (1973). Mathematics and humanistic themes: Sum considerations. *Educational Theory, 23*(3), 191-214.

Brown, S. I. (1974). Musing on multiplication. *Mathematics Teaching, 61,* 26-30.

Brown, S. I. & Walter, M. I. (1969). What if not? *Mathematics Teaching, 46,* 38-45.

Brown, S. I. & Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Devlin, K. (1994). *Mathematics: The science of patterns.* New York: Scientific American Library.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1986). On the aesthetics of mathematical thought. *For the Learning of Mathematics 6*(1), 2-10.

Fischbein, E. (1978). Intuition and mathematical education. In E. Cohors-Fresenborg, I. Wachsmuth (Eds.) *Proceedings of the Second Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* pp. 148-176. Osnabruck, Germany: PME.

Hardy, G. H. (1956/1992). *A mathematician's apology.* New York: Cambridge University Press.

Kilpatrick, J. (1984). Reflection and recursion. In M. Carss (Ed.) *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education.* Cambridge, M.A.: Birkhauser.

Le Lionnais, F. (1962/1971). Beauty in mathematics. In F. L. Lionnais (Ed.) *Great currents of mathematical thought volume II mathematics in the arts and sciences* (pp. 121-158). New York: Dover Publications, Inc.

Poincaré, H. (1908/2003). *Science and method.* New York: Dover Publications, Inq.

Polya, G. (1988/2004). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Silver, E. & Metzger, W. (1989). Aesthetic influences on expert mathematical problem solving. In D. McLeod, and V. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: a new perspective* (pp. 59-74). New

York: Springer.
Sinclair, N. (2004). The role of the aesthetic in mathematical inquiry. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(3), 261–284.
Sinclair, N. (2006). *Mathematics and beauty: Aesthetic approaches to teaching children.* Teachers College Press.
Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *The Journal of Secondary Gifted Education, 17*(1), 20–36.
Steen, L. A. (Ed.). (1990). *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy.* Washington, D. C.: National academy press.
Wells, D. (1990). Are these the most beautiful? *The Mathematical Intelligencer, 12*(3), 37–41.

A Methodology for Grasping Aesthetic Qualities of Mathematical Objects: Based on the Principle of "Unity in Variety"

Hayato HANAZONO

Since Poincaré (1908/2003) singled out the importance of the aesthetic sensibility in mathematical discovery, interest in the relationship between creativity and the aesthetic sensibility has risen in the field of mathematics education. Some studies have demonstrated that pursuing aesthetic qualities of mathematical objects guides one to solve mathematical problems through analysis of the problem solving process (e.g. Silver & Metzger, 1989; Sinclair, 2006). However, these studies did not refer to any specific methodologies to grasp aesthetic qualities of mathematical objects.

The purpose of this paper is to propose a method for grasping aesthetic qualities of mathematical objects. In order to accomplish this purpose, this paper uses a theoretical method based on the principle of "unity in variety" by Takeuchi (1979), from Aesthetics, a branch of philosophy.

Based on this theory, the author constructed a framework for categorizing aesthetic qualities of mathematical objects from the viewpoint of "form" in mathematical objects. This "form" consists of "rational form" and "individual form." Moreover, the author specified "identification of 'the whole' and 'form' of mathematical objects" and "feeling the vastness of mathematical objects" as the process for grasping aesthetic qualities of mathematical objects. From the contrast between this process and the theory in mathematics education, the author identified "'What-If-Not' strategy inquiring 'rational form'" as the method of identifying "the whole" and "form" of mathematical objects and to feel the vastness of the mathematical objects.

The results of analyzing a concrete mathematical object using the above method revealed two things. First, the effectiveness of the method to identify "the whole" and "form" of mathematical objects became apparent. Second, however, the effectiveness of the method to feel the vastness of the mathematical objects was not necessarily clear.