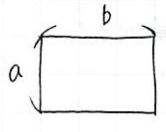
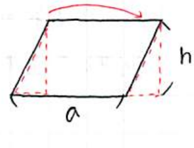
I、積分　　面積，体積

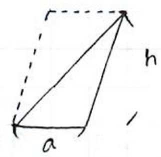
II、微分

。小学校

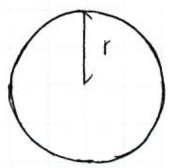
、長方形 ab　　、平行四辺形 ah　　、三角形 $\frac{1}{2}ah$







、円の面積



$\underline{\pi r^2}$

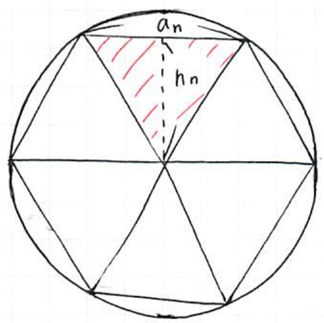
アルキメデス Archimedes（前3c）

・浮力

。テコの原理

周の長さを $\ell(r) = \underbrace{k}_{2\pi}r$ とする

内接する正n角形を考える



極限

n個の三角形にわける

$n\frac{1}{2}a_n h_n \leq Sr$

$$\frac{1}{2}(\underbrace{n a_n}_{\substack{\downarrow \\ 2\pi r}})\underbrace{h_n}_{\substack{\downarrow \\ r}} \qquad \frac{1}{2}\cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2$$

$n \to \infty$

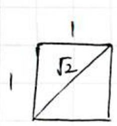
、実数

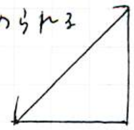
、有理数 $\frac{2}{3}$　rational number

ピタゴラス（前6c）
教団

三平方の定理

斜辺を求められる





ピタゴラスの定理が
成り立つことは前2000年に
知られていた。（経験的事実として）

レポートは
感想文
自然B 2階
レポートボックスへ
2月20日まで

球の体積

半径 r

$\frac{4}{3}\pi r^3$

17c前半　Cavalieri (1598 – 1647)

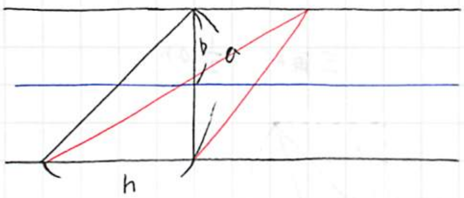
カヴァリエリの原理

Newton (1642 – 1727)

力学

、カヴァリエリの原理

2次元



平行線に囲まれた図形

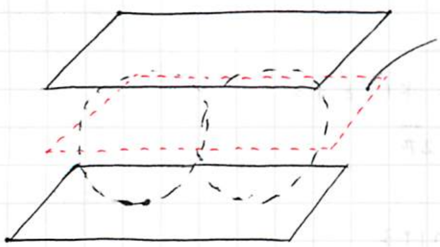
もう1本平行線を加え 図形を切る

→その線分の長さが等しいとき、
図形の面積は等しい。

・底辺を共有する2つの三角形を考える。

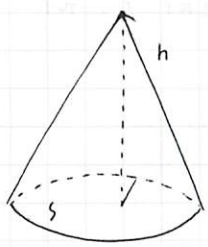
切った線分の長さは $\frac{b}{a}h$ として与えられる。(底辺の長さに比例する)

3次元　2つの平行な平面を考える



任意の平面で図形を切って
断面の面積が等しいとき、
2つの図形の体積は等しい。

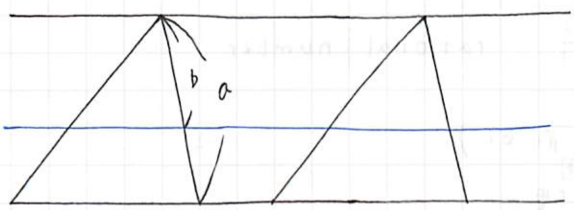
錐体を考える



体積 = $\frac{1}{3}Sh$

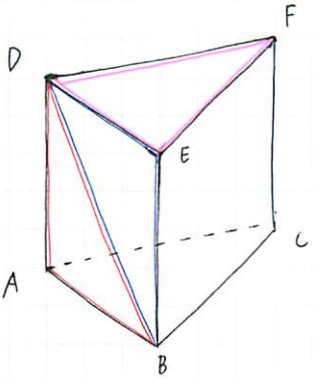
$\left.\begin{array}{l}\text{底面積が同じ}\\ \text{高さも同じ}\end{array}\right\}$ 錐体

円柱
三角柱



$\left(\frac{b}{a}\right)^2 S$

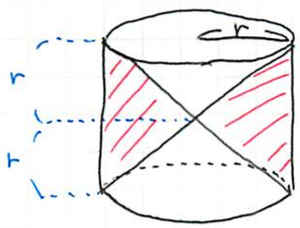
レポート
I. 3つの三角錐の体積が等しくなることをカヴァリエリの定理を使って示す



ABDC
DEBC
DECF
} 3つの三角錐にわけて考える.

底面　半径 r の円
高さ　$2r$
の円柱

体積 $\pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$



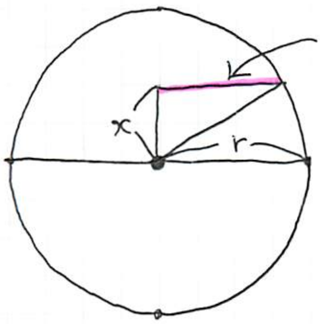
2つの円錐 $= 2\times\frac{\pi r^2\times r}{3} = \frac{2}{3}\pi r^3$

2つの円錐をとり除いた部分

$= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\pi r^3$ ← 球の体積

$\sqrt{r^2-x^2}$



$\pi(\sqrt{r^2-x^2})^2$

$= \pi(r^2-x^2)$

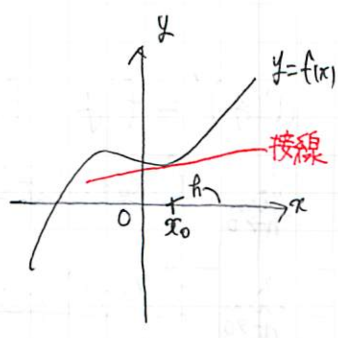
微分

19C〜　Cauchy　"ε−δ論法"

高校だと　"極限 ⇒ 微分" の順に学習

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ：接線の傾き.

平均の傾き.



17C　Newton, Leibniz.
18C　Lagrange　Euler　← この時代の微分のとらえ方が異なる

$$f(x_0+h)-f(x_0)=h\,f'(x_0)$$

? 成り立つ?

h が十分小さければ成り立つとする

↓ どのくらい小さいか

$h^2=0$ くらい

$$D=\{d\in\mathbb{R}\mid d^2=0\}\neq\{0\}$$ ← たくさんある

こんな世界 D を考える
巾零無限小

数学向けに言うと...

$$\left[\begin{array}{l} F:D\to\mathbb{R} \\ (\exists!\,a\in\mathbb{R})(\forall d\in D)(F(d)=F(0)+a\,d) \end{array}\right.$$

$$F: d\in D\longmapsto f(x_0+d)$$

$$F(0)=f(x_0)\qquad F(d)=f(x_0+d)$$

$$(f+g)'=f'+g'$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-\{f(x_0)+g(x_0)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)+g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

$$f(x_0+d)+g(x_0+d)=f(x_0)+f'(x_0)d+g(x_0)+g'(x_0)d$$

$$=f(x_0)+g(x_0)+\{f'(x_0)+g'(x_0)\}d$$

$$(fg)'=f'g+fg' \quad \text{(Leibniz)}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h)-f(x_0)\,g(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h)-f(x_0)\,g(x_0+h)+f(x_0)\,g(x_0+h)-f(x_0)\,g(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h)-f(x_0)\,g(x_0+h)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(x_0)\,g(x_0+h)-f(x_0)\,g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} g(x_0+h) + f(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

$$\downarrow \quad f'(x_0) \qquad \downarrow \quad g(x_0) \qquad \downarrow \quad g'(x_0)$$

~Leibniz式~

$$f(x_0+d)\,g(x_0+d) = \{f(x_0)+f'(x_0)d\}\{g(x_0)+g'(x_0)d\}$$

$$= f(x_0)g(x_0) + \{f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\}d + f'(x_0)g'(x_0)\underset{\parallel\atop 0}{d^2}$$

$d \in D,\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha d \in D$

$\because\ (\alpha d)^2 = \alpha^2 d^2 = 0$

$d_1 \in D,\ d_2 \in D \not\Rightarrow d_1 + d_2 \in D$

$(d_1+d_2)^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2 \neq 0$

$(d_1+d_2)^3 = d_1^3 + d_2^3 + 3d_1^2d_2 + 3d_1d_2^2 = 0$

$D = D_1$ ： 1次の無限小

$D_2 = \{d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0\}, \dots, D_n = \{d \in \mathbb{R} \mid d^{n+1} = 0\}$

レポート
$d_1 \in D_n,\ d_2 \in D_m \Rightarrow (d_1+d_2)^{n+m+1} = 0$ を示せ

ヒント 2項定理

① $d_1, \dots, d_n \in D \Rightarrow d_1 + \dots + d_n \in D_n$

数学的帰納法を使って証明.

$n = 1$ のときは明らか.
$n+1$ のときも上のレポート問題から明らか.

$d_1, d_2 \in D$

$$f(x_0+d_1+d_2) = f(x_0+d_1) + f'(x_0+d_1)d_2$$
$$= f(x_0) + d_1 + \{f'(x_0) + f''(x_0)d_1\}d_2$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(d_1+d_2) + f''(x_0)d_1d_2$$

$d_1 d_2 = \left(\frac{d_1+d_2}{2}\right)^2$ に注意すると

$$= f(x_0) + f'(x_0)(d_1+d_2) + \frac{1}{2} f''(x_0)(d_1+d_2)^2$$

3つの場合.

$$f(x_0 + d_1 + d_2 + d_3)$$

$$= f(x_0 + d_1 + d_2) + f'(x_0 + d_1 + d_2)\, d_3$$

$\vdots$

$$\frac{(d_1+d_2+d_3)^2}{2}$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(d_1 + d_2 + d_3) + f''(x_0)(d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3)$$

$$+ f'''(x_0)(d_1 + d_2 + d_3)$$

$$\frac{(d_1+d_2+d_3)^3}{6}$$

レポート
n = 4, 5 の場合について上のことを確認する