情報数学III講義（第9回）

平成28年12月14日

1　コーシーの積分定理

前回定義を与えた**正則関数**について再び考える．$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が, 二つの実関数 $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を用いて $f = f_1 + if_2$ と書けているとする．このとき f が正則関数であるとは, $df = \alpha dz$（ただし $dz = dx + idy$）と書けるような $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在することを言う．f が正則関数であることの必要十分条件は次の定理によって与えられる.（証明は前回の講義ノートを参照.）

定理 1 (コーシーリーマンの関係式)**.**

$$f \text{ が正則関数} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

この定理を用いて次の事実が導ける.

命題 1. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を（正則とは限らない）複素関数とする．また $dz = dx + idy$ とする．このとき次が成り立つ：

$$f \quad \text{が正則関数} \quad \Leftrightarrow \quad d(f\ dz) = 0.$$

証明 1. 定義より,

$$f\ dz = (f_1 + if_2)(dx + idy) = (f_1 dx - f_2 dy) + i(f_2 dx + f_1 dy).$$

片々微分したのち $dx \wedge dy$ の交代性に注意しながら式変形すると,

$$\begin{aligned} d(f\ dz) &= \frac{\partial f_1}{\partial y} dy \wedge dx - \frac{\partial f_2}{\partial x} dx \wedge dy + i\left(\frac{\partial f_2}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial f_1}{\partial x} dx \wedge dy\right) \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\right) dy \wedge dx + i\left(\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial x}\right) dy \wedge dx. \end{aligned}$$

したがって,

$$d(f\ dz) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0$$

となる．これはコーシーリーマンの関係式であるため, 求めるべき命題が示された.　□

今, 道 γ に沿っての線積分 $\int_\gamma (f_1 + if_2)dz$ を考える. 特に γ が閉路の場合には, 囲まれた領域を Σ とすると, ストークスの定理より線積分は面積分 $\int_\Sigma d(f_1 + if_2)dz$ と等しい. したがって命題 1 より, f が正則関数かつ Σ のいたるところで定義されていれば, ぐるりとまわった線積分の結果は 0 になる.

この「Σ のいたるところで定義されていれば」という条件はストークスの定理の前提による. 実際, 特異点（f が定義されない点）を含むような領域上では上記が成立しないという例が授業で紹介された. $f(z) = \frac{1}{z}$ とし, $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto a(\cos\theta + i\sin\theta)$ について線積分：

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{1}{a(\cos\theta + i\sin\theta)} \frac{dz}{d\theta} d\theta$$

を計算することについて考える.（γ は原点中心, 半径 a の円である. f は $z = 0$ において定義されないことに注意.）このとき $\dfrac{dz}{d\theta} = -a\sin\theta + ia\cos\theta$ なので,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{dz}{z} \;&=\; \int_0^{2\pi} \frac{-\sin\theta + i\cos\theta}{\cos\theta + i\sin\theta} d\theta \\ &=\; \int_0^{2\pi} id\theta \;=\; 2\pi i.\end{aligned}$$

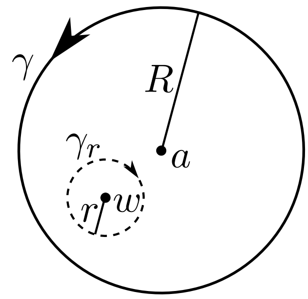
したがって閉じた線積分の結果が 0 にならない. こうした例外に注意しながら, 次にコーシーの積分定理について考える.

コーシーの積分定理

中心 a, 半径 R の円 γ とその内点 w を考える. f を正則関数とする. このとき次の式が成立する：

$$f(w) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)dz}{z - w}.$$

これをコーシーの積分定理と呼ぶ. この定理を証明するにあたり, $f(z)$ は $z = w$ においてな定義されないためこのままではストークスの定理が使えない. そのため w を小さな半径 r の γ_r で囲んで $\gamma \cup \gamma_r$ を考えることにする.



そうすると, $\gamma \cup \gamma_r$ 内部には特異点がなくなるため積分公式が使えて,

$$\int_{\gamma \cup \gamma_r} \frac{f(z)dz}{z - w} \;=\; 0$$

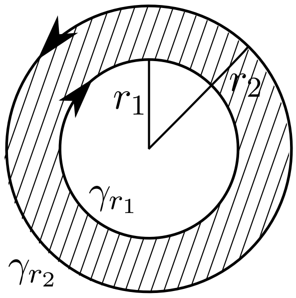
となる．この等式をばらすと次の関係が得られる．

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-w} \ = \ \int_{\gamma_r} \frac{f(z)dz}{z-w}$$

以下を r についての関数として考える．

$$\varphi(r) \ = \ \int_{\gamma_r} \frac{f(z)dz}{z-w}$$

ただし，このままでは $r \to 0$ にすると分母が 0 になってしまうため都合が悪い．そのため，まず r に依存しないことを証明する．$0 < r_1 < r_2$ として，$\gamma_{r_1} \cup \gamma_{r_2}$ を考える．



そうすると，そうすると，$\gamma_{r_1} \cup \gamma_{r_2}$ の内部には特異点がなくなるので以下の関係が得られる．

$$\int_{\gamma_{r_1} \cup \gamma_{r_2}} \frac{f(z)dz}{z-w} \ = \ \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(z)dz}{z-w} - \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(z)dz}{z-w} \ = \ 0$$

この関係から r に依存していないことがわかる．ただし，r を小さくしていくと分母が 0 になってしまうので，$\gamma_r : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto w + r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を用いると，$\dfrac{dz}{d\theta} = ir(\cos\theta + i\sin\theta)$ より，

$$\begin{aligned}
\varphi(r) \ &= \ \int_{\gamma_r} \frac{f(z)dz}{z-w} \\
&= \ \int_0^{2\pi} \frac{f(w + r(\cos\theta + i\sin\theta))}{w + r(\cos\theta + i\sin\theta) - w} \frac{dz}{d\theta} d\theta \\
&= \ i \int_0^{2\pi} f(w + r(\cos\theta + i\sin\theta)) d\theta
\end{aligned}$$

のように $\varphi(r)$ を r の連続関数として表現できる．$r \geq 0$ のときには r に依存していないので定数関数になる．特に，$r = 0$ のときには $\varphi(0) = 2\pi i f(w)$ となり，コーシーの積分公式が導かれる．ここで，$|z - a| > |w - a|$ なので，等比級数の公式より以下のようになる．

$$\begin{aligned}
f(w) \ &= \ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz \\
&= \ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z-a) - (w-a)} \\
&= \ \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} + (w-a) \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z-a)^2} + (w-a)^2 \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z-a)^3} + \cdots \right\}
\end{aligned}$$

このようにして，少なくとも球の内部では正則関数 f を冪級数を用いて表現できることが示せた．

2　代数学の基本定理

ここではコーシーの積分定理を利用して代数学の基本定理を証明することを目標とする．区間 $[a, b]$ で $|f(x)| \leq M$ のように定数 M で上から抑えられるとすると，

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a)$$

が成り立つ．同様のことが線積分でも言えて，L を γ の長さとすると，

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq ML$$

のような関係が成り立つ．これを用いてまずは次の補題を証明する．

補題 1. 正則関数 f が複素平面全体で定義されているとき，$max\{|f(z)| \mid z \in \mathbb{C}\} < \infty$ を満たす（上に有界）ならば f は定数関数である．

証明 2. 複素平面全体で正則関数が定義されているため R はいくらでも大きく取ることができる．これを踏まえて，冪級数で表現した f の *1* 次項について考えると，

$$\begin{aligned}
\left|\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz\right| &\leq \int_\gamma \frac{|f(z)|}{(z-a)^2}|dz| \\
&\leq \frac{M}{R^2}\int_\gamma |dz| \\
&\leq \frac{2\pi M}{R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

したがって，*1* 次以降の項の係数がすべて 0 になり，定数項のみが残るため f は定数関数である．□

この補題をを使うと，複素関数論を用いて代数学の基本定理を簡単に証明できる．

定理 2. 以下の関数は必ず解を持ち *1* 次式に因数分解できる．

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

ただし，$a_n \neq 0,\ n \geq 1,\ a_i \in \mathbb{C}\ (0 \leq i \leq n)$ である．

証明 3. $f(x) = 0$ が解を持たないと仮定すると，$\dfrac{1}{f(z)}$ が複素平面全体で定義されることになるので，

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{f(z)}\right| &= \left|\frac{1}{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0}\right| \\
&= \left|\frac{1}{z^n(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_0}{z^n})}\right| \leq M
\end{aligned}$$

という関係が成り立つ．これは，z をどんどん大きくすると分母が定数に近づいて，平面全体でなにかある定数 M で抑えられることを表す．したがって，先ほどの定理を満たすため $\dfrac{1}{f(z)}$ が定数関数ということになる．しかし，多項式関数で割った関数が定数関数になることはあり得ない．ゆえに，$f(z)$ は必ず解を持つ．□