情報数学III講義（第7回）

平成28年11月28日

1

ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ を考える．これを力の場と思って曲線に沿って動いたときにどれくらいの仕事がなされるのかを考えるのが線積分である．

一般に道 γ_1, γ_2 が異なれば $\int_{\gamma_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \neq \int_{\gamma_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$ である．（授業中にはこれを「同じ東京から京都に行くにしても, どの経路を選択するかによってかかるコストが変わる」と表現した.）しかし, ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の中には, 線積分の結果, つまり移動されたときになされた仕事が始点と終点のみに依存するものがある．これを**保存力**と呼ぶ．私たちが既に知っている保存力としては, 例えば重力がある．

あるベクトル場 $\boldsymbol{f}$ が保存力であるかどうかを知りたい場合はどうすればいいだろう？定義からそのまま示すとすれば任意の道について「始点と終点が等しい $\Rightarrow$ 線積分の結果が等しい」という事実を示せばよいのだが, このような道は無限にあり容易ではないように思える．このとき次の二つの命題が役に立つ．

命題 1 $\boldsymbol{f}$ をベクトル場とする．このとき,

$$\boldsymbol{f} = \mathrm{grad}\ \varphi \text{ となるようなスカラー場 } \varphi \text{ が存在} \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{f} \text{ は保存力.}$$

証明 1 $(\Rightarrow)\boldsymbol{f} = \mathrm{grad}\ \varphi$ となるようなスカラー場 φ が存在するとする．このとき勾配定理（前回の講義ノート参照）より, 任意の道 $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^3$ に対し,

$$\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_\gamma (\mathrm{grad}\ \varphi) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \varphi(\gamma(\mathrm{b})) - \varphi(\gamma(\mathrm{a})).$$

したがって $\boldsymbol{f}$ の γ における線積分の結果は始点と終点のみに依存するため $\boldsymbol{f}$ は保存力である．

$(\Leftarrow)\boldsymbol{f}$ を保存力とする．$\mathbb{R}^3$ 空間の中の x_0 という点を固定し, 次のような関数 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を考える：

$$\varphi(\boldsymbol{x}) := \int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \quad \text{（ただし, } \gamma \text{ は } x_0 \text{ を始点, } x \text{ を終点とする道.）}$$

$\boldsymbol{f}$ は保存力なので線積分は始点と終点のみに依存することに注意. また,

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{grad}\ \varphi)(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{e}_1) - \varphi(\boldsymbol{x}) \\ \varphi(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{e}_2) - \varphi(\boldsymbol{x}) \\ \varphi(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{e}_3) - \varphi(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot (d\boldsymbol{e}_1) \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot (d\boldsymbol{e}_2) \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot (d\boldsymbol{e}_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x})d \\ f_2(\boldsymbol{x})d \\ f_3(\boldsymbol{x})d \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

したがって $\boldsymbol{f} = \mathrm{grad}\ \varphi$ である. □

もう一つの命題は次を仮定する.

仮定 1 *閉曲線があれば, それを縁とするような閉曲面が存在する.*

命題 1 の正確な証明はここでは行わないが, 直感的には「針金で作った閉曲線を石鹸水につけてゆっくりと持ち上げてみると石鹸水の膜ができる. この膜は針金 (=閉曲線) を縁とする曲面である」と考えればよい.

命題 2 $\boldsymbol{f}$ *が保存力* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rot}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$*.*

証明 2 $(\Rightarrow)\boldsymbol{f}$ を保存力とする. このとき命題 1 より, $\boldsymbol{f} = \mathrm{grad}\ \varphi$ となるようなスカラー場 φ が存在する. $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ \varphi) = \boldsymbol{0}$ となるため主張が成立する.

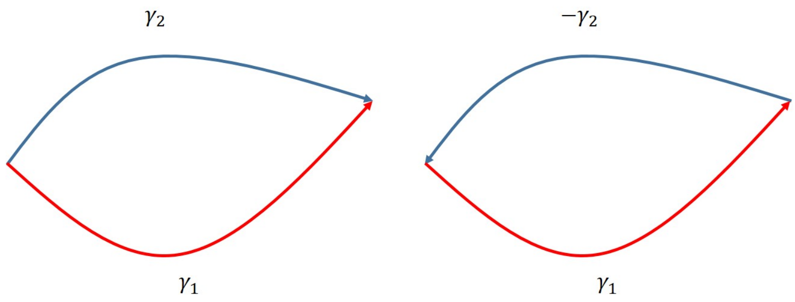
$(\Leftarrow)$ $\mathrm{rot}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ が成立するベクトル場 $\boldsymbol{f}$ を考える. γ を閉曲線とする. Σ を仮定 1 で与えられるような閉曲面とする. このとき回転定理より,

$$\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_\Sigma (\mathrm{rot}\boldsymbol{f}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0.$$

したがって, 始点と終点が等しい場合には線積分した結果が零になることがわかった. 次に γ_1, γ_2 を始点と終点が等しい二つの曲線とする. γ_2 を逆向きにたどる曲線を $-\gamma_2$ と表記する. このとき γ_1 をたどったあとに $-\gamma_2$ をたどると閉路になっている. (下図参照.) この閉路を γ と表記する. 線積分は方向を逆にすると符号が逆になることに注意すると,

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} - \int_{\gamma_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_{\gamma_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{-\gamma_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \\
&= \int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

よって $\int_{\gamma_1} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_2} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$ であることが示された. 線積分の結果が始点と終点のみに依存しているため, $\boldsymbol{f}$ は保存力である. □



2

ここからは複素関数を扱うが, 推薦入試に伴う全額休講の影響で時間がなかったため, 今回の講義ではいくつかの例を示して終わりとなった.

オイラーの公式

実数の世界では $e^x, \sin x, \cos x$ をマクローリン展開すると以下のようになるのであった.

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots
\end{aligned}
$$

これを複素数の世界へ適用する.（もちろんこれが複素数の世界で成り立つことは別途証明する必用があるが, ここでは適用できると仮定する.）このとき複素数 z に対し,

$$
\begin{aligned}
e^z &= 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots \\
\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots
\end{aligned}
$$

が成り立つ. また, $i^2 = -1$ に注意しながら e^{ix} を展開する（複素数において指数法則が成り立つこともここでは仮定する）と,

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}ix^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}ix^5 - \cdots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \\
&= \cos x + i \sin x.
\end{aligned}
$$

つまり複素数の世界においては, 指数関数と三角関数は親戚関係にあるということだった.

加法定理

指数法則が複素数の世界でも成り立つと仮定すれば,

$$e^{i(x_1+x_2)} = e^{ix_1}e^{ix_2}$$

である. それぞれを上で導いた式で展開すると,

$$\begin{aligned} e^{i(x_1+x_2)} &= \cos x_1 + x_2 + i\sin(x_1+x_2), \\ e^{ix_1}e^{ix_2} &= (\cos x_1 + i\sin x_1)(\cos x_2 + i\sin x_2) \\ &= \cos x_1\cos x_2 + i\cos x_1\sin x_2 + i\sin x_1\cos x_2 - \sin x_1\sin x_2 \\ &= (\cos x_1\cos x_2 - \sin x_1\sin x_2) + i(\cos x_1\sin x_2 + \sin x_1\cos x_2) \end{aligned}$$

二つの式の虚部と実部を照らし合わせれば, 加法定理になっていることがわかる.