

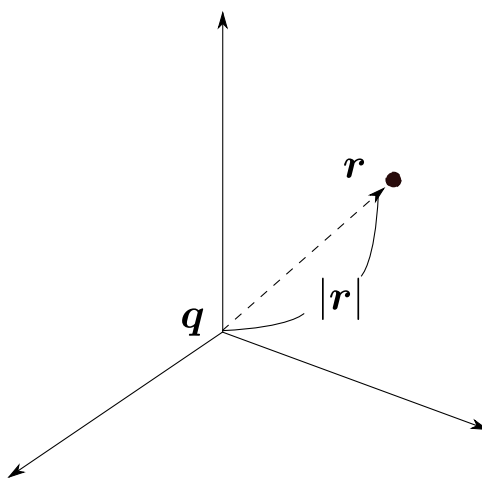
# 情報数学III講義（第6回）

平成28年11月16日

## 1.2 クーロンの法則

電磁気学にクーロンの法則というものがある。距離  $r$  だけ離れたところに  $q_1, q_2$  の電荷を持った点電荷があるとき、その間には  $k\frac{q_1q_2}{r^2}$  で表される力が働く ( $k$  は定数)。このように  $r^2$  に反比例している法則を、逆2乗の法則という。似たような法則には万有引力の法則がある。この逆2乗の法則には面白い性質がある。

まず原点に電荷  $q$  を置き、電荷  $q$  から点  $R$  が受ける力について考える。点  $R$  の



位置ベクトルを  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  とすると、大きさは  $|\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$  と表せるので、電場  $\mathbf{f}$  は以下の式で表せる。

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= k \frac{q}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \\ &= k \frac{q}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \\ &= kq(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

この電場の発散を計算すると、

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{f} &= kq \left\{ \frac{\partial}{\partial x} x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{\partial}{\partial z} z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right\} \\ &= kq \{ 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}(x^2 + y^2 + z^2) \} \\ &= 0\end{aligned}$$

と0になることがわかる。これは逆2乗の法則に従うときのみである。万有引力の法則も逆2乗の法則であるので、こちらも発散が0になる。

今度は次のような式を考える。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (x^2 + y^2 + z^2)^l$$

先程は  $l = -\frac{3}{2}$  だったが、距離が離れていくほど力が弱まるとすると、逆3乗や逆2.5乗でも良い気がする。この発散を計算し、 $l = -\frac{3}{2}$  でないと発散が0にならないことを確認せよ。

### 1.3 ガウスの発散定理の条件

閉曲面  $\Sigma$  で囲まれた領域  $\Omega$  に電場  $\mathbf{f}$  があつたとき、ガウスの発散定理が使えた。

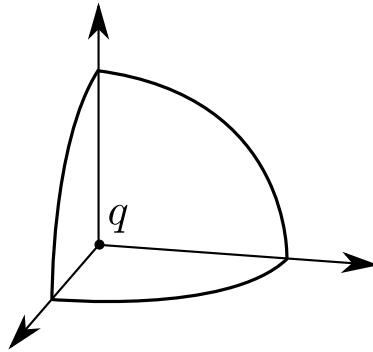
$$\int_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{f}) dV$$

左辺が面積分、右辺が体積分を表している。例えば、ある場所に電荷をおいたときの位置  $\mathbf{r}$  における面積分は、右辺の体積分を計算すれば得られる。

前節までは、発散が0になるという話をしてきたが、今回は原点に電荷  $q$  を置いたときに、原点中心に半径  $a$  の球面を考える。

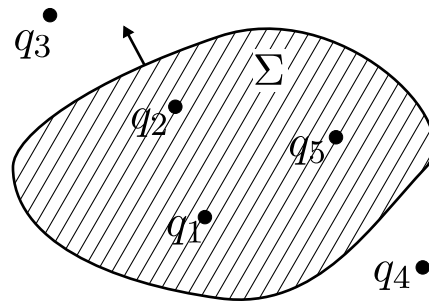
そうすると、球面の点は原点に置いた電荷から等距離であるため、力の大きさは球面のどの点でも同じであり、向きは接平面に垂直となる。この面積分は、球面の表面積  $4\pi a^2$  と力の大きさ  $f = \frac{kq}{a^2}$  なので、 $4\pi kq$  となることがわかる。しかし、ガウスの発散定理を使うと0になるのに対して、この場合は  $4\pi kq$  となり明らかに0にならない。

実は、ガウスの発散定理を使うためには非常に重要な条件がある。それは、ベクトル場  $\mathbf{f}$  は空間全体で定義されなくても良いが、少なくとも曲面内部ではベクトル場が定義されていなければならないというものである。今回の場合は、球面



内部にある電荷が置いてある場所（原点）においてベクトル場が定義されていない。このような点を数学では特異点と呼ぶ。ガウスの発散定理は閉曲面内に特異点が存在しないという制約のもとで成立する定理なのである。

今度は空間の中に閉曲面  $\Sigma$  があり、この空間の中に電荷が散らばっているとす



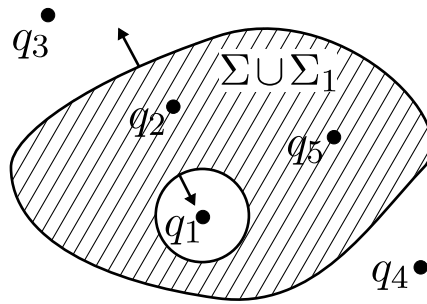
この5つの電荷によって生じる電場  $\mathbf{f}$  は、 $q_1$  によって生じる電場  $\mathbf{f}_1$  と  $q_2$  によって生じる電場  $\mathbf{f}_2$  と... と定義すると、 $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4 + \mathbf{f}_5$  のように表せる。したがって、この面積分は分解したそれぞれの面積分を計算すれば良い。

$$\int_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^5 \int_{\Sigma} \mathbf{f}_i \cdot d\mathbf{S}$$

ここで、 $q_3$  と  $q_4$  に関しては特異点が閉曲面の中にないので、ガウスの発散定理を使って0になることがわかる。しかし、他の電荷に関しては閉曲面の内部に特異点が存在してしまうため、ガウスの発散定理をそのまま使うことができない。そこで、特異点がある部分  $q_1$  を小さな球面  $\Sigma_1$  で囲って隔離する。

2つの閉曲面を合体させた  $\Sigma \cup \Sigma_1$  を考えると、電荷  $q_1$  に対する特異点がこの合体させた閉曲面の外になるため、ガウスの発散定理が使える。閉曲面の場合は外向きを表とするため、曲面の向きに注意すると以下のような関係が得られる。

$$\underbrace{\int_{\Sigma \cup \Sigma_1} \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{S}}_{=0} = \int_{\Sigma} \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{S} + \left( - \int_{\Sigma_1} \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{S} \right)$$



したがって、電荷  $q_1$  を中心とした半径  $a$  の球面を考えると、

$$\int_{\Sigma} \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Sigma_1} \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{S} = 4\pi k q_1$$

ということがわかる。  $q_2$  と  $q_5$  も同様なので、

$$\int_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi k (q_1 + q_2 + q_5)$$

が得られる。要するに、複数の電荷がある場合の面積分は、閉曲面で囲まれた中の電荷を足し合わせれば良いということである。これをガウスの法則と呼ぶ。このようなことが言えるのは、クーロンの法則が逆2乗の関係になっているからにほかならない。

## 1.4 様々な応用

### § 無限に伸びた針金

無限に伸びた針金（直線）に電荷を一様に分布させたとき、単位長さあたり  $\rho$  の電荷になったとする。針金から距離  $r$  にある点の電場を求めよ。

- ガウスの法則を用いない場合

クーロンの法則にしたがって、小さな領域からそれぞれどういう力を受けるかを計算して針金全体から受ける力を計算する。無限に伸びた針金に沿って  $x$  軸をとり、 $x$  軸と垂直な面上に点  $r$  をとる。 $x$  と  $r$  のなす角を  $\theta$  とする。このとき  $x = r \tan \theta$  が成り立っているので、以下の式が成り立つ

$$dx = \frac{r d\theta}{\cos^2 \theta}$$

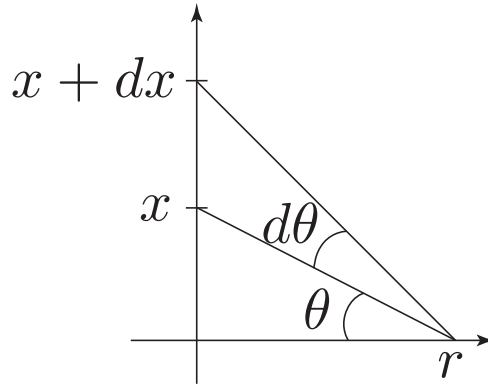


図 1: 無限に伸びた針金に沿って  $x$  軸をとり,  $x$  軸と垂直な面上に点  $r$  をとる

長さ  $dx$  の針金が距離  $r$  に作る電場の大きさ  $|E_{dx}|$  は以下のとおりである.

$$\begin{aligned}
 |E_{dx}| &= \frac{k\rho}{\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)^2} dx \\
 &= \frac{k\rho \cos^2\theta}{r^2} \frac{rd\theta}{\cos^2\theta} \\
 &= \frac{k\rho}{r} d\theta
 \end{aligned}$$

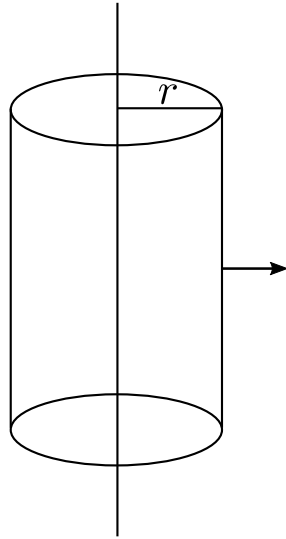
無限に伸びた針金全体が  $r$  に作る電場を考える. 微小領域  $dx$  が距離  $r$  に作る電場を足し合わせて求める. このとき,  $x$  軸方向の電場の大きさは打ち消しあって 0 になる.  $r$  を含む  $x$  軸と垂直な平面に写像した電場の大きさは  $|E_{dx}| \cos\theta$  であるから, 距離  $r$  にある点の電場は, 以下のとおりである.

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |E_{dx}| \cos\theta &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\rho \cos\theta}{r} d\theta \\
 &= \frac{2k\rho}{r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \\
 &= \frac{2k\rho}{r}
 \end{aligned}$$

- ガウスの法則を用いる場合

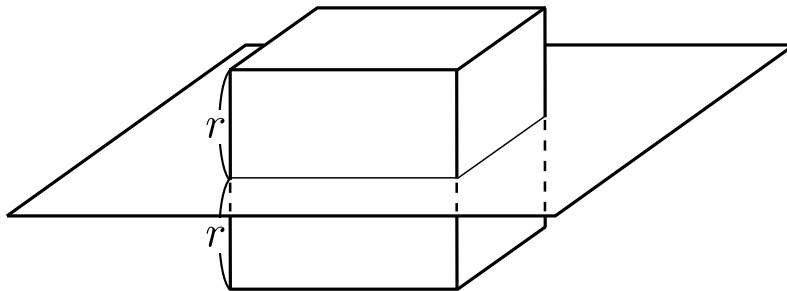
図のように針金を中心とした半径  $r$ , 高さ  $l$  の円柱を考える. これは閉曲面であり, 円柱で切り取られた部分の内部の電荷について計算すれば良い. この場合, 電場は針金に直交しているので, 上下底面の面積分は 0 になることが容易にわかる. 電場の大きさを  $f$  とすると,

$$\begin{aligned}
 f \times 2\pi r l &= 4\pi k l \rho \\
 \therefore f &= \frac{2k\rho}{r}
 \end{aligned}$$



### § 無限に伸びた平面

無限に伸びた平面に対して、電荷を単位面積あたり  $\sigma$  となるよう一様に分布させる。このとき、平面から距離  $r$  離れたところの電場を求めよ。



電場の方向は平面に直交しているため、今度は一辺の長さが  $2r$  の立方体を考えれば良い。

## 2 勾配定理

次の定理を勾配定理という。

勾配定理

スカラー場  $\varphi$  に対して曲線  $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$  があるとき、以下の等式が成り立つ

$$\int_{\gamma} (\text{grad}\varphi) \cdot d\mathbf{r} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

前回の回転定理や発散定理と同じ論法で進める。  $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$  という曲線とスカラー場  $\varphi$  において、  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ ,  $d \in D$  に対して、無限小のレベルで以下の式が成り立つとする。

$$(\text{grad}\varphi)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}d = \varphi(\mathbf{x} + d\mathbf{a}) - \varphi(\mathbf{x}) \quad (1)$$

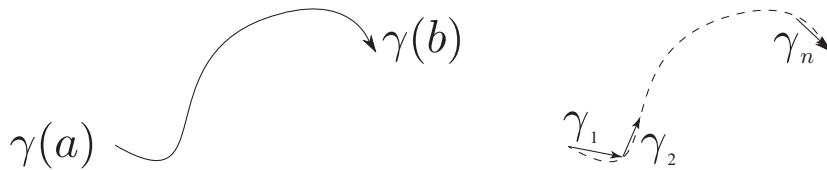


図 2: 曲線  $\gamma$  を無限小のレベルに分割する

図 2 のように  $\gamma$  を  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$  のように分解する。 ( $\gamma_i : [a_i, b_i] \mapsto \mathbb{R}^3$ ) すると、以下のような式変形が行える。

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (\text{grad}\varphi) \cdot d\mathbf{r} &= \sum \int_{\gamma_i} (\text{grad}\varphi) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \sum \varphi(\gamma_i(b_i)) - \varphi(\gamma_i(a_i)) \\ &= \varphi(\gamma_n(b_n)) - \varphi(\gamma_1(a_1)) \\ &= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) \end{aligned}$$

さて、多変数の Kock-Lawvere の公理から (1) の右辺は  $\varphi(\mathbf{x} + d\mathbf{a}) - \varphi(\mathbf{x}) = \varphi'(\mathbf{x})(\mathbf{a})d$  のように変形できる。  $\mathbf{a}$  が  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$  を用いて  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$

と表せるとすると、 $\varphi'(\mathbf{x})(\mathbf{a})$  は以下のように変形できる.

$$\begin{aligned}\varphi'(\mathbf{x})(\mathbf{a}) &= \varphi'(\mathbf{x})(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \\ &= a_1\varphi'(\mathbf{x})(\mathbf{e}_1) + a_2\varphi'(\mathbf{x})(\mathbf{e}_2) + a_3\varphi'(\mathbf{x})(\mathbf{e}_3) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{a}\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\text{grad}\varphi = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)$$