情報数学III講義（第5回）

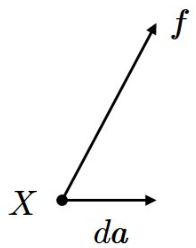
平成28年11月9日

1　交代形式, 線積分, 面積分, 基本定理

今回の講義の目標はベクトル解析における回転定理, 発散定理を導入することであるが, その前にいくつかの項目について簡単に復習する.

1.1　一次の交代形式

まず力の場について考える.



点 X で力 $\boldsymbol{f}$ が働いていたとして, その作用のもとで, X からベクトル $\boldsymbol{a}$ に沿う無限小の移動を行うと, なされる仕事量は

$$\boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{a}$$

である.（ただし $d \in D = \{d \in \mathbb{R} | d^2 = 0\}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$.）

ここで $\varphi : \boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{a}$ を考える. φ は線形性, 交代性（引数を入れ替えると符号が変わる）をもつため **1 次の交代形式**と呼ばれる. 空間の各点に 1 次の交代形式を対応させる写像を 1 次の微分形式と呼ぶ. 空間の各点にベクトル場を対応させる写像をベクトル場と呼ぶ. この二つは対応しており, 新たに線形関数

$$dx : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto a_1, dy : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto a_2, dz : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto a_3$$

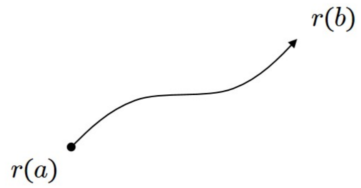
を導入すると,

$$
\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{a}) &= \varphi(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \\
&= a_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + a_2\varphi(\boldsymbol{e}_2) + a_3\varphi(\boldsymbol{e}_3) \\
&= dx(\boldsymbol{a})\varphi(\boldsymbol{e}_1) + dy(\boldsymbol{a})\varphi(\boldsymbol{e}_2) + dz(\boldsymbol{a})\varphi(\boldsymbol{e}_3) \\
\therefore \varphi &= \varphi(\boldsymbol{e}_1)dx + \varphi(\boldsymbol{e}_2)dy + \varphi(\boldsymbol{e}_3)dz.
\end{aligned}
$$

となるため φ は dx, dy, dz を基底とする線形結合として表せる. このことからわかるように 1 次の交代形式の全体は線形空間をなす. よって, $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ ならば, $f_1\boldsymbol{e_1} + f_2\boldsymbol{e_2} + f_3\boldsymbol{e_3}$ に対応する交代形式は $f_1dx + f_2dy + f_3dz$ となる.

1.2 線積分

ベクトル場の中をある経路にそって移動した際にどれほどの仕事がなされたかを考える. 具体的には, 下図のような $r : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ という空間中の曲線に沿って動いたときにどれだけ仕事がされるかを考える.



力 $\boldsymbol{f}$ の中で曲線 r に沿って動いたとき, なされる仕事は

$$\int_r \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{f}(r(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)dt$$

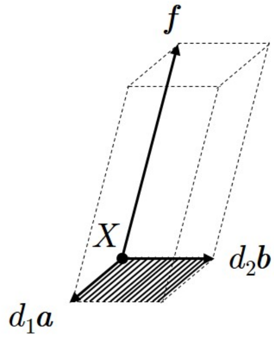
である. ここで, ドットはベクトルの内積を表すことに注意. この式を 1 次の微分形式 ω を用いて表すと次のようになる.

$$\int_r \omega = \int_a^b \omega(r(t))(r'(t))dt.$$

1.3 二次の交代形式

次に流れの場（例えば水の流れ）について考える. 点 X での流れは, X を起点として 2 つのベクトル $d_1\boldsymbol{a}, d_2\boldsymbol{b}$ で張られる小さな升を考えて, 単位時間に横切る水の量（体積）を観測すればよい.（ただし $d_1, d_2 \in D, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$.）このとき求める体積は次のようになる（ただし θ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のある平面と $\boldsymbol{f}$ の角度）:

$$|d_1\boldsymbol{a} \times d_2\boldsymbol{b}||\boldsymbol{f}| \cos\theta = (d_1\boldsymbol{a} \times d_2\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{f} = d_1d_2(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{f}$$



ここで先ほどと同様に $\varphi : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{f}$ を考える．外積は線形性, 交代性をもつため, φ も同様である．これを 2 次の交代形式という．空間の各点に 2 次の微分形式を対応させたものを 2 次の微分形式と呼ぶ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3$$

に対し $\varphi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を展開すると,

$$\begin{aligned}
&= \quad \varphi(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3, b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) \\
&= \quad a_1b_1\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + a_2b_2\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) + a_3b_3\varphi(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) + \\
&\qquad a_1b_2\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + a_2b_1\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + a_1b_3\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) + \\
&\qquad a_3b_1\varphi(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) + a_2b_3\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) + a_3b_2\varphi(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) \\
&= \quad (a_2b_3 - a_3b_2)\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) + (a_3b_1 - a_1b_3)\varphi(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) + (a_1b_2 - a_2b_1)\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)
\end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}
dy \wedge dz : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto a_2b_3 - a_3b_2 &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \\
dz \wedge dx : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto a_3b_1 - a_1b_3, &= \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \\
dx \wedge dy : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto a_1b_2 - a_2b_1 &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

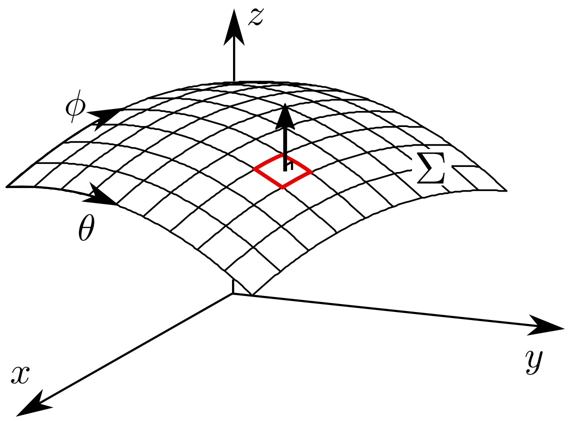
と定めれば,

$$\varphi = \varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)dy \wedge dz + \varphi(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1)dz \wedge dx + \varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)dx \wedge dy.$$

よって φ は $dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$ を基底とする線形結合として表せる．このことからわかるように 2 次の交代形式の全体は線形空間をなす.（次元は 3.）よって, $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ ならば, $f_1\boldsymbol{e_1} + f_2\boldsymbol{e_2} + f_3\boldsymbol{e_3}$ に対応する交代形式は $f_1dy \wedge dz + f_2dz \wedge dx + f_3dx \wedge dy$ となる.

1.4　面積分

それぞれの区間 $[a_1, b_1] \in \theta$，$[a_2, b_2] \in \phi$ について，曲面 $\Sigma : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$ 上でベクトル場 $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が定義されているとする．このとき，曲面 Σ を細分して微小領域ごとに面積の大きさの法線ベクトルを考える．



ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の曲面 Σ 上の面積分は，この法線ベクトルとベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の内積を，曲面 Σ 上のすべての微小領域にわたって加えた和で表せる．

$$\int_\Sigma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} \;=\; \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \boldsymbol{f}\left(\Sigma(\theta, \phi)\right) \cdot \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Sigma}{\partial \phi} \right) d\theta d\phi.$$

またこの式を 1 次の微分形式 ω を用いて表すと次のようになる．

$$\int_\Sigma \omega = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \omega(\Sigma(\theta, \phi)) \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Sigma}{\partial \phi} \right) d\theta d\phi.$$

1.5　微積分学の基本定理

次を微積分学の基本定理と呼ぶ．

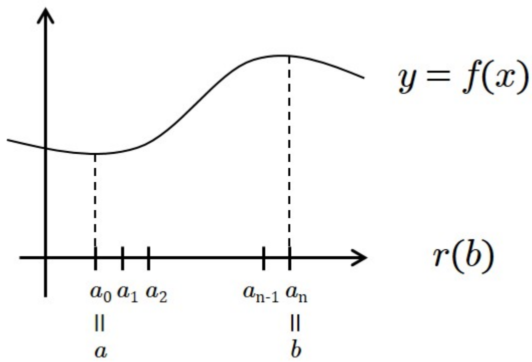
微積分学の基本定理

$F' = f$ とする．このとき次が成り立つ．

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

我々がここで主張したいのは, 基本定理が無限小レベルで成立すると仮定を置くとそこから一般の基本定理が導けるということである．この「仮定」とは第一回の授業で導入した Kock-Lawvere の公理にほかならない．同様の議論を回転定理と発散定理に対しても行うため, ここで復習しておくと理解の助けになるだろう．

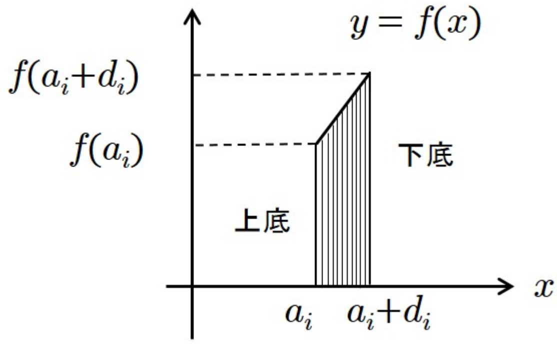
下図のように区間 $[a, b]$ を, 任意の i について $a_{i+1} - a_i \in D$ が成り立つくらいに細かい区間 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ に細分する．



このとき分割した細長い領域の面積をそれぞれ求めてから足し合わせても結果は変わらないため, 次が成り立つ.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx.$$

さて, ここで上式の右辺において i を固定して考える. 任意の i について $a_{i+1} - a_i \in D$ が成り立つくらいに細かい区間に分けてあるため, 当然この i についてもそれが成り立つ. したがって Kock-Lawver の公理より f は微小区間 $[a_i, a_{i+1}]$ において直線となる.（下図参照. なお, $d_i := a_{i+1} - a_i$ としている.）



求める斜線部分は台形であり, 台形の面積公式は (上底)+(下底)×(高さ)/2 なので, 求める面積は

$$\frac{1}{2}d_i(f(a_i) + f(a_i) + f'(a_i)d_i) = f(a_i)d_i$$

となる. つまりこの台形の面積は, 実はタテが $f(a_i)$ でヨコが d_i の長方形の面積と等しいということを示している. ここからただちに無限小レベルでの基本定理, すなわち任意の i に対し

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx = F(a_{i+1}) - F(a_i)$$

が言える.

いま「Kock-Lawvere の公理を認める $\Rightarrow$ 無限小レベルでの基本定理が成り立つ」を示した．最後に「無限小レベルでの基本定理が成り立つ $\Rightarrow$ 基本定理が一般にも成り立つ」を示そう．こちらは以下のような式変形より導ける．

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx \\ &= \sum_{i-0}^{n-1}(f(a_{i+1})-f(a_i)) \\ &= (f(a_1)-f(a_0))+(f(a_2)-f(a_1))+\cdots \\ &= f(a_n)-f(a_0) \\ &= f(b)-f(a).\end{aligned}$$

つまり中間部分は丁度打ち消し合ってなくなってしまうため, 区間の端だけが残るというわけである．

2　回転定理

次の定理を**回転定理**という．

回転定理

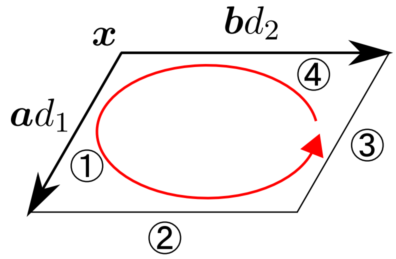
閉曲線 γ を境界とする曲面 Σ に対して，ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ があるとき，以下の等式が成り立つ．

$$\int_\gamma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_\Sigma (\mathrm{rot}\boldsymbol{f})\cdot d\boldsymbol{S}$$

さて, 上記のように回転定理を記述したが, 現段階ではこれは意味を持っていない．$\mathrm{rot}\boldsymbol{f}$ が定義されていないからである．通常の流儀であればまず定義を与え, そこから定理を証明するものであるが, 今回の講義は $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}$ がどのような直感の下で定義されるのかを説明するため, あえてこのような順番で構成されるという工夫がなされている．具体的には, 基本定理のときと同じように, まず無限小のレベルで定理が成立するよう $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}$ を定義し, 次に「無限小レベルで回転定理が成立する $\Rightarrow$ 回転定理が一般に成り立つ」を示すという構成になっている．

まず閉曲線 γ について線積分を行う向きを決める．積分は向きを逆にすると符号が逆になってしまうからである．ここでは曲線を境界とする曲面では，曲面の表に旗を立てて旗が左手に見えるように回る方向を正とした． 点 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ に対して 2 つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$ が張る空間と，ベクトル場 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を考える．無限小のレベルで回転定理が成り立つように $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}$ を決めたいので $d_1,d_2\in D$ を導入する．

定理の左辺（線積分）について計算する．2 つのベクトルで張られる曲面は平行四辺形であるため，図のように 4 つに分けられる．それぞれの線積分を計算すると以下のように



なる．

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{a}d_1+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}d_1)\cdot\boldsymbol{b}d_2-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}d_2)\cdot\boldsymbol{a}d_1-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot d_2\boldsymbol{b}\\
&\quad=\ \{\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}d_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}_{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})\cdot d_1}\}\cdot\boldsymbol{b}d_2-\{\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}d_2)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}_{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})d_2}\}\cdot\boldsymbol{a}d_1\\
&\quad=\ d_1d_2\left\{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}\right\}
\end{aligned}
$$

ここで，$\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}$（$\varphi:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$）とおくと，二重線型性が成り立っていることがわかる．また，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を入れ替えると，

$$
\varphi(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})\ =\ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}\ =\ -\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})
$$

となり，2 次の交代形式であるということがわかる．2 次の交代形式全体は 3 次元の線形空間で $\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{g}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$（$\exists^!\boldsymbol{g}\in\mathbb{R}^3$）のように表せる．

それでは，$\boldsymbol{g}$ の x 成分を計算するために，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3$ とする．このとき，$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}$（$f_i:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$）のように成分ごとに分解でき，

$$
\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\ =\ \frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x}(\boldsymbol{x})dx+\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial y}(\boldsymbol{x})dy+\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial z}(\boldsymbol{x})dz
$$

$$
dx:\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\mapsto a_1\quad dy:\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\mapsto a_2\quad dz:\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\mapsto a_3
$$

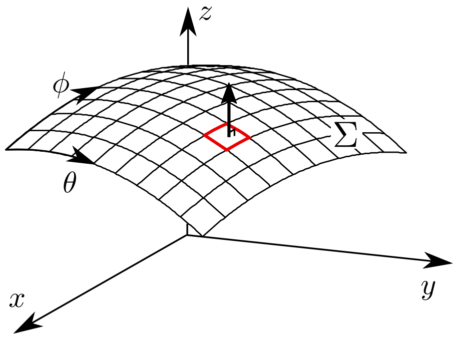
であることを思い出すと，

$$
\begin{aligned}
d_1d_2\{\boldsymbol{g}\cdot(\underbrace{\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}_{\boldsymbol{e}_1})\}\ &=\ d_1d_2\{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_3)\cdot\boldsymbol{e}_2\}\\
&=\ d_1d_2\left\{-\frac{\partial f_2}{\partial z}(\boldsymbol{x})+\frac{\partial f_3}{\partial y}(\boldsymbol{x})\right\}
\end{aligned}
$$

となり，$\boldsymbol{g}$ の x 成分が得られる．同様に，y 成分と z 成分についても導出すると以下のようになる．

$$
\boldsymbol{g}\ =\ \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(\boldsymbol{x})-\frac{\partial f_2}{\partial z}(\boldsymbol{x}),\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(\boldsymbol{x})-\frac{\partial f_3}{\partial x}(\boldsymbol{x}),\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\boldsymbol{x})-\frac{\partial f_1}{\partial y}(\boldsymbol{x})\right)
$$

我々はこれを $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}$ と定義する．



いま無限小のレベルで回転定理が成り立つように $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}$ の定義を決めた．最後に，「無限小のレベルで回転定理が成り立つ $\Rightarrow$ 回転定理が一般に成り立つ」ということを示す．

閉曲線 γ で囲まれる曲面 Σ について，曲面を細分して考える．このとき無限小レベルの回転定理より，

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma}(\mathrm{rot}\boldsymbol{f})d\boldsymbol{S} &= \sum_{i,j}\int_{\Sigma_{ij}}(\mathrm{rot}\boldsymbol{f})d\boldsymbol{S} \\ &= \sum_{i,j}\int_{\gamma_{ij}}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\gamma}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

となる．細分した微小な領域 Σ_{ij} に対しての線積分を図で見てみると，隣の領域との接している辺に関する線積分が相殺されることがわかる．これを加え合わせると，打ち消し合わない縁の部分が残り，境界 γ のみが出てくる．したがって一般の場合にも定理が成り立つことがわかる．これは微積分学の基本定理と同じ論法である．

3　発散定理

次の定理をガウスの発散定理という．

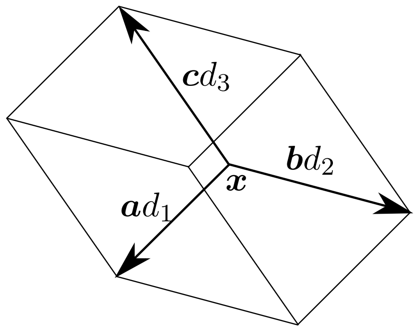
ガウスの発散定理

閉曲面 Σ を境界とする領域 Ω に対して，ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ があるとき，以下の等式が成り立つ．

$$\int_{\Sigma}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega}(\mathrm{div}\boldsymbol{f})dV$$

先ほどと全く同じ要領で進める．点 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ に対して 3 つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$ が張る平行六面体と，ベクトル場 $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を考える．無限小のレベルでガウスの発散定理が成り立つように $\mathrm{div}\boldsymbol{f}$ を決めたいので $d_1,d_2,d_3\in D$ を導入する．

定理の左辺（面積分）について計算する．合計で 6 つの面を考えなければならないので，



向きに注意して計算すると次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}d_1)\cdot(\boldsymbol{b}d_2\times\boldsymbol{c}d_3)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}d_2\times\boldsymbol{c}d_3)\\
&\qquad+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}d_2)\cdot(\boldsymbol{c}d_3\times\boldsymbol{a}d_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{c}d_3\times\boldsymbol{a}d_1)\\
&\qquad\qquad+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}d_3)\cdot(\boldsymbol{a}d_1\times\boldsymbol{b}d_2)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a}d_1\times\boldsymbol{b}d_2)\\
&=\ \{\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}d_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))}_{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})d_1}\}\cdot(\boldsymbol{b}d_2\times\boldsymbol{c}d_3)\\
&\qquad+\{\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}d_2)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))}_{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})d_2}\}\cdot(\boldsymbol{c}d_3\times\boldsymbol{a}d_1)\\
&\qquad\qquad+\{\underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}d_3)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))}_{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{c})d_3}\}\cdot(\boldsymbol{a}d_1\times\boldsymbol{b}d_2)\\
&=\ d_1d_2d_3\{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\}
\end{aligned}
$$

ここで，$\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$（$\varphi:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$）とおくと，三重線型性が成り立っていることがわかる．また，例えば $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を入れ替えると，

$$
\begin{aligned}
&\varphi(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\\
&=\ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\\
&=\ -\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})
\end{aligned}
$$

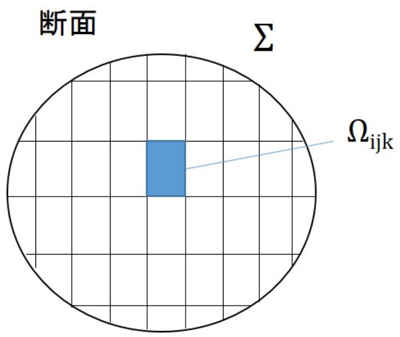
となり，3 次の交代形式であるということがわかる．したがって，3 次の交代形式全体は 1 次元のベクトル空間で 3×3 の行列式を用いて，$\varphi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\alpha dx\wedge dy\wedge dz$（$\exists^!\alpha\in\mathbb{R}$）のように表せる．

それでは，α を求めるために，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}_3$ とする．そうすると，

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_1)\cdot\underbrace{(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)}_{\boldsymbol{e}_1}+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_2)\cdot\underbrace{(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1)}_{\boldsymbol{e}_2}+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_3)\cdot\underbrace{(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)}_{\boldsymbol{e}_3}\\
&\qquad=\ \begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x}\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{e}_1+\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial y}\\ \frac{\partial f_3}{\partial y}\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{e}_2+\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial z}\\ \frac{\partial f_2}{\partial z}\\ \frac{\partial f_3}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{e}_3\\
&\qquad=\ \frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}
\end{aligned}
$$

となり，これが α である．このように，無限小のレベルで成り立つように div を決めた．

最後にガウスの発散定理が一般の場合に成り立つかを確認する. Ω を Ω_{ijk} という小さい部分（部屋）に分ける. 断面図は下の図のようになる.



全体は小さな体積分の足し合わせであって, 無限小レベルでは発散定理が成り立つので,

$$\int_{\Omega}(\mathrm{div}\boldsymbol{f})\cdot dV=\sum_{ijk}\int_{\Omega_{ijk}}(\mathrm{div}\boldsymbol{f})\cdot dV=\sum_{ijk}\int_{\Sigma_{ijk}}\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

部屋と部屋の境界のところは隣同士で打ち消し合う. 結局, 角部屋の境界だけが残って, それが Σ である. したがって一般の場合も発散定理が成り立つ.