情報数学III講義（第3回）

平成28年10月19日

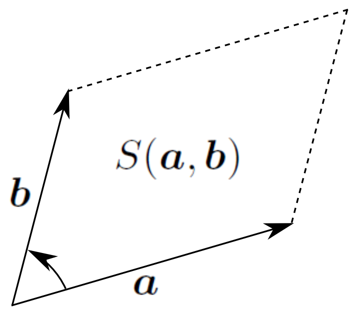
1　行列式, 内積, 外積

1.1　行列式

ここでは行列式が何を表しているのかを, 特に2次元（平面）と3次元（空間）の場合において議論する.

§ 平面 ; $\mathbb{R}^2$

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ によって張られる平行四辺形の面積を $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ と表す.



ただし，これは符号がついた面積であり，$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へ回った時に，反時計回りであれば正，時計回りであれば負と定義される面積とする（右手系). このとき S について以下に示す3つの性質が成り立つ：

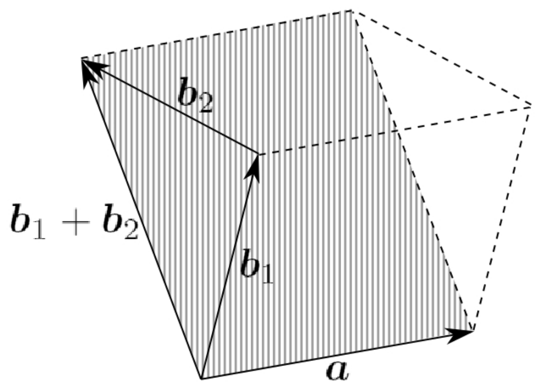
平行四辺形の符号付き面積の性質

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & = & -S(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \\
(2) & S(\alpha \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & = & \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\
 & S(\boldsymbol{a}, \beta \boldsymbol{b}) & = & \beta S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\
(3) & S(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) & = & S(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) + S(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) \\
 & S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) & = & S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1) + S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_2)
\end{array}
$$

性質 (1)(2) は符号の決め方や平行四辺形の形状がどうなるかを考えれば明らか. (1) について, 特に $\boldsymbol{a}$=$\boldsymbol{b}$ の場合直ちに次が導ける：

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) &= -S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) \\ \therefore S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) &= 0. \end{aligned}$$

これは $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ なので平行四辺形がつぶれてしまっていて面積が 0 になっているととらえればわかりやすい. 性質 (3) について説明する．これは以下の図において $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ により張られる 2 つの平行四辺形が，斜線で示した $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2$ で張られる平行四辺形と面積が一致することを表す．斜線内に存在する三角形と斜線外の三角形は合同なのは明らかであるため両辺が等しくなる．(1) を交代性と呼ぶ. また (2)(3) を合わせて二重線形性と呼ぶ.



さて, ここで $\mathbb{R}^2$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ について考えると，

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1) &= S(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2) = 0, \\ S(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) &= 1, \\ S(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1) &= -1. \end{aligned}$$

となる．このとき $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2$ と表して面積 S を考える．

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) &= S(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2, b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2) \\ &= a_1b_1\underbrace{S(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)}_{=0}+a_1b_2\underbrace{S(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)}_{=1}+a_2b_1\underbrace{S(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)}_{=-1}+a_2b_2\underbrace{S(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)}_{=0} \\ &= a_1b_2-a_2b_1 \end{aligned}$$

これは紛れも無く行列式 (determinant)：

$$\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1$$

の解析的な定義である．私たちがこれまで使っていた 2 次行列の行列式は, 行列を構成する 2 本のベクトルがつくる平行四辺形の面積を表していたのである.

§ 空間 ; $\mathbb{R}^3$

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ で形成される平行六面体の符号付き体積を $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ と定義する．符号は，$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に右ねじを回した時に，ねじが進む方向に $\boldsymbol{c}$ が向いていれば正，反対側ならば負とする（右手系）．このとき V について以下に示す 3 つの性質が成り立つ：

平行六面体の符号付き体積の性質

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) & = & -V(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = -V(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = -V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) \\
(2) & V(\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) & = & \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \\
& V(\boldsymbol{a}, \beta\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) & = & \beta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \\
& V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \gamma\boldsymbol{c}) & = & \gamma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \\
(3) & S(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) & = & V(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + V(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \\
& S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}) & = & V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}) + V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}) \\
& S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2) & = & V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_1) + V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_2)
\end{array}
$$

性質 (1) は引数のどれかを入れ替えると符号が反転することを意味している．これを 2 次元の場合と同様に交代性と呼ぶ．また (2)(3) を合わせて三重線形性と呼ぶ．(今回の講義では三重線形性の証明を二重線形性と同様と述べたが, 次回の講義で補足を設けるとのこと.)

ここで先ほどと同様に $\mathbb{R}^3$ の標準基底：

$$
\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

によって張られる平行六面体を考える．V の定義より $V(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 1$ であり, そこに性質 (1) を繰り返し適用することで次を得る：

$$
\begin{aligned}
V(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) &= V(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) = V(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1, \\
V(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) &= V(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = V(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = -1.
\end{aligned}
$$

最後に，平面のときと同様にそれぞれのベクトルを

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3, \\
\boldsymbol{b} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3, \\
\boldsymbol{c} &= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}
$$

とおいて $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ を計算すると,

$$V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \cdots = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

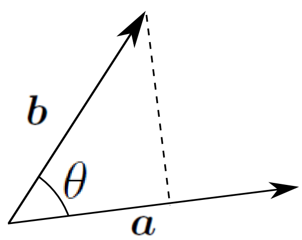
のように $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を列ベクトルとしてもつ行列の行列式が出てくる.

1.2　内積（スカラー積）

次に内積について考える. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ の内積を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ と表し, 以下のように定義する：

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \stackrel{\text{def}}{=} |\boldsymbol{a}| \underbrace{|\boldsymbol{b}| \cos \theta}_{\text{正射影の影の長さ}}$$

（ただし $\stackrel{\text{def}}{=}$ は左を右で定義する記号.）このように内積は $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ というベクトルからスカラーへの写像となり, ゆえにスカラー積と呼ばれる.



以下に内積の性質を示す：

内積の性質

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} & = & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} \\
(2) & (\alpha \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} & = & \alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \\
 & \boldsymbol{a} \cdot (\beta \boldsymbol{b}) & = & \beta(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \\
(3) & (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{b} & = & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) & = & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}_2
\end{array}$$

性質 (1)(2) は内積の定義より明らか. 性質 (3) の初めの式は $|\boldsymbol{a}| \cos \theta$ は $\boldsymbol{b}$ への正射影の大きさとなることから証明される. 性質 (1) を対称性と呼び, 性質 (2),(3) を合わせて二重線形性と呼ぶ.

$\mathbb{R}^2$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ の内積は以下のようになる：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0, \\
\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 1.
\end{aligned}$$

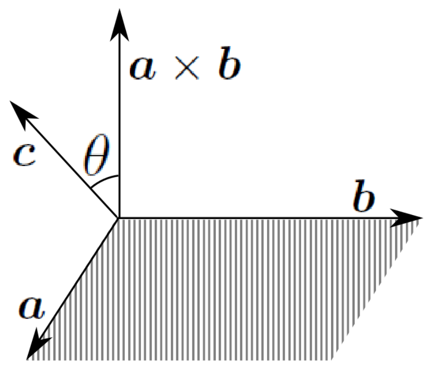
ここで $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2$ と表すと，それらの内積は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2)\cdot(b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2) \\ &= a_1b_1(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1) + a_1b_2(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2) + a_2b_1(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1) + a_2b_2(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 \end{aligned}$$

となり, 内積の解析的な定義が導けた.

1.3　外積（ベクトル積）

次に外積について考える．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ の外積を $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と表記し,「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のある平面に右手系になるように直行するベクトルで, 大きさが $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形の面積であるもの」と定義する．このとき外積は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ というベクトルからベクトルへの写像となり, ゆえにベクトル積と呼ばれる.



以下に外積の性質を示す：

外積の性質

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

(2) $(\alpha\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

$\boldsymbol{a}\times(\beta\boldsymbol{b}) = \beta(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

(3) $(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2$

性質 (1),(2) は外積の定義より明らか．性質 (3) について説明する．上記で符号付き体積

$V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ について触れたが，これをベクトル積を用いて表すと以下のようになる．

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) &= \underbrace{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}_{\text{底面積}}\,\underbrace{|\boldsymbol{c}|\cos\theta}_{\text{高さ}} \\ &= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は 2 つのベクトルが張る平行四辺形に直交するベクトルであり，長さ $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ は平行四辺形の面積（底面積）と等しい．このベクトルに対する $\boldsymbol{c}$ の正射影は平行六面体の高さと等しいので，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta$ は $V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ と一致する．ここで，体積 V に関しては三重線形性を示してあるので，これを利用して $V(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ を展開して整理する．

$$\begin{aligned} ((\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} &= V(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \\ &= V(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+V(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \\ &= (\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \\ &= \{(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b})\}\cdot\boldsymbol{c} \end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)\times\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{b})$ とおくと，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{c}$ が示されたことがわかる．したがって $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{c}=0$ である．このとき，$\boldsymbol{c}$ には $\mathbb{R}^n$ 中の任意のベクトルを代入できるため，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ とすれば，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2=0$ となり，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ が得られる．以上より，性質 (3) の一つ目の式が成立することが示せた．$\boldsymbol{b}$ についても同様の式が成り立つため，外積は二重線形性を持つことがわかる．

ここで $n=3$ とする．$\mathbb{R}^3$ の標準基底

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の外積は以下のとおりである:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_3, \\ &\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1, \\ &\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_2. \end{aligned}$$

このとき，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{b} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

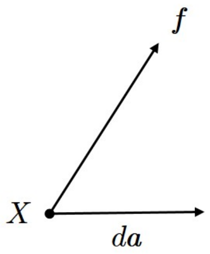
と置けば, 外積の二重線形性を用いて $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を展開し（内積の場合と同様に）解析的な定義を得られるはずである. この部分は今回のレポートとなっている.

2　ベクトル解析

ここからベクトル解析に入る．ベクトル解析は電磁気学のために作られた数学で, 主に 3 次元空間, ベクトル場とスカラー場を扱う．スカラー場とは空間の各点にスカラーを対応させせることである．例えば部屋の各店に温度や湿度を対応させたものはスカラー場となる．一方, ベクトル場とは空間の各点にベクトルを対応させるもののことである．ベクトル場の代表的なものとしては力の場と流れの場がある．例えば地球上の各点では地球の中心に向かって引力が働いている．力はベクトル（向きと大きさをもつ）で, これは力の場の例である．流れの場としては部屋の空気の流れや水の流れなどが挙げられる．

2.1　力の場

まずは力の場について考える．空間の各点に力が働いているとして, 私たちはそれをどのように観測したらよいのだろうか？ 近代科学は実験・観測に基づく学問であり, 観測できないもの（例えば神など）は対象にできない．そこで力そのものを観測するかわりに, 力の場で移動を行った際に発生する仕事量を観測することを考える．仕事量は例えば熱に変換することで観測することができる．



点 X で力 $\boldsymbol{f}$ が働いていたとして, その作用のもとで, X からベクトル $\boldsymbol{a}$ に沿う無限小の移動を行うと, なされる仕事量は

$$\boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{a}$$

である．（ただし $d \in D = \{d \in \mathbb{R} | d^2 = 0\}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$.）

ここで $\varphi : \boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{a}$ を考える．上で見たように内積は線形性, 交代性（引数を入れ替えると符号が変わる）をもつ．これを 1 次の交代形式という．新たに線形関数

$$dx : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto a_1, dy : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto a_2, dz : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto a_3$$

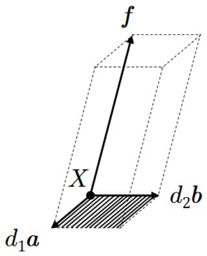
を考えると,

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{a}) &= \varphi(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \\
&= a_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + a_2\varphi(\boldsymbol{e}_2) + a_3\varphi(\boldsymbol{e}_3) \\
&= dx(\boldsymbol{a})\varphi(\boldsymbol{e}_1) + dy(\boldsymbol{a})\varphi(\boldsymbol{e}_2) + dz(\boldsymbol{a})\varphi(\boldsymbol{e}_3) \\
\therefore \varphi &= \varphi(\boldsymbol{e}_1)dx + \varphi(\boldsymbol{e}_2)dy + \varphi(\boldsymbol{e}_3)dz.
\end{aligned}$$

よって φ は dx, dy, dz を基底とする線形結合として表せる.

2.2　流れの場

次に流れの場（例えば水の流れ）について考える. 点 X での流れは, X を起点として 2 つのベクトル $d_1\boldsymbol{a}, d_2\boldsymbol{b}$ で張られる小さな升を考えて, 単位時間に横切る水の量（体積）を観測すればよい.（ただし $d_1, d_2 \in D, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$.）　このとき求める体積は次のようになる



（ただし θ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のある平面と $\boldsymbol{f}$ の角度）:

$$|d_1\boldsymbol{a} \times d_2\boldsymbol{b}||\boldsymbol{f}|\cos\theta = (d_1\boldsymbol{a} \times d_2\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{f} = d_1 d_2(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{f}$$

ここで先ほどと同様に $\varphi : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{f}$ を考える. 上で見たように外積は線形性, 交代性をもつ. これを 2 次の交代形式という.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3$$

に対し $\varphi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を展開すると,

$$\begin{aligned}
&= \varphi(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3, b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) \\
&= a_1b_1\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + a_2b_2\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) + a_3b_3\varphi(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) + \\
&\quad a_1b_2\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + a_2b_1\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + a_1b_3\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) + \\
&\quad a_3b_1\varphi(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) + a_2b_3\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) + a_3b_2\varphi(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) + (a_3b_1 - a_1b_3)\varphi(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) + (a_1b_2 - a_2b_1)\varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)
\end{aligned}$$

となる．したがって

$$
\begin{aligned}
dy \wedge dz : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto a_2 b_3 - a_3 b_2 &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \\
dz \wedge dx : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto a_3 b_1 - a_1 b_3, &= \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \\
dx \wedge dy : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto a_1 b_2 - a_2 b_1 &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

と定めれば,

$$
\varphi = \varphi(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) dy \wedge dz + \varphi(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) dz \wedge dx + \varphi(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) dx \wedge dy.
$$

よって φ は $dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$ を基底とする線形結合として表せる．