情報数学III講義（第10回）

平成28年12月21日

1.1　複素関数論の利用方法

中心a，半径rの円γとその内部の点wを考える．aを中心とする小さな円をγ_1，wを内部に含むような小さな円をγ_2とする．fはaを除いて正則であるような関数であるとする．γ_2の内部ではfは正則なのでコーシーの積分定理より，

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(z)dz}{z-w} \tag{1}$$

が成り立つ．また，$\gamma\cup\gamma_1\cup\gamma_2$では$\frac{f(z)}{z-w}$は正則なので，

$$\int_{\gamma\cup\gamma_1\cup\gamma_2}\frac{f(z)dz}{z-w} = 0 \tag{2}$$

が成り立つ．(2)式を分解すると次式が得られる．

$$\int_{\gamma}\frac{f(z)dz}{z-w} - \int_{\gamma_1}\frac{f(z)dz}{z-w} - \int_{\gamma_2}\frac{f(z)dz}{z-w} = 0 \tag{3}$$

(1)式と(3)式より，

$$\begin{aligned}
f(w) &= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\gamma}\frac{f(z)dz}{z-w} - \int_{\gamma_1}\frac{f(z)dz}{z-w}\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-a)-(w-a)} - \int_{\gamma_1}\frac{f(z)dz}{(z-a)-(w-a)}\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}}dz - \int_{\gamma_1}\frac{f(z)}{w-a}\cdot\frac{-1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left\{\left(\int_{\gamma}\frac{f(z)dz}{z-a} + (w-a)\int_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-a)^2} + (w-a)^2\int_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-a)^3} + \cdots\right)\right. \\
&\quad - \left(\frac{1}{w-a}\int_{\gamma_1}f(z)dz + \frac{1}{(w-a)^2}\int_{\gamma_1}f(z)(z-a)dz\right. \\
&\quad + \left.\left.\frac{1}{(w-a)^3}\int_{\gamma_1}f(z)(z-a)^2dz + \cdots\right)\right\}
\end{aligned}$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} \\
a_{-m} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(z)(z-a)^{m-1}
\end{aligned}
$$

とおけば，

$$
f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-a)^n - \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}\frac{1}{(w-a)^m}
$$

のような形で書ける．なお，a_i はそれぞれの積分の値である．これを**ローラン展開**といい，a_{-1} のことを関数 f の a における**留数**という．

例えば，中心 a の円 γ に沿った線積分はローラン展開を使えば，

$$
\int_\gamma f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_\gamma (z-a)^n dz - \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^m} \tag{4}
$$

となるが，$n \geq 0$ のとき $(z-a)^n$ には原始関数が存在するため，$\int_\gamma (z-a)^n dz = 0$ である．同様にして $m \geq 2$ に対して $\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^m} = 0$ となる．問題となるのは $m = 1$ のときであるが，このときの線積分は $\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)} = 2\pi i$ となることは以前示した．ゆえに (4) 式の線積分の値は $2\pi i a_{-1}$ となる．

ローラン展開を用いた他の問題を考えてみる．原点中心，半径 2 の円 γ に対して，次式で表される $f(z)$ を考える．

$$
f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}
$$

$f(z)$ の特異点は $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i)$（複合任意）の 4 点であり，これらの点は γ の内部にある．

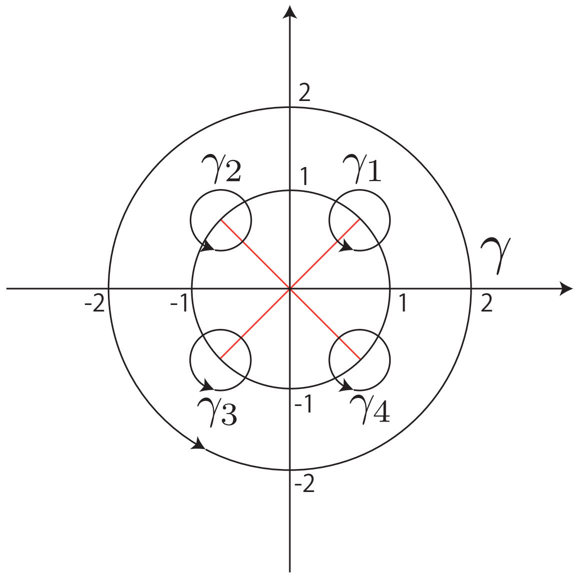
図のように，特異点のまわりに小さな円 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ を考える．$\gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ の内部では $f(z)$ は正則なので次式が成り立つ．

$$
\int_{\gamma\cup\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4} f(z)dz = 0
$$

この式を分解すると次式が得られる．

$$
\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz \tag{5}
$$

特異点を第一象限から順に $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ とする．(5) 式の右辺の線積分を求めるた



めに，以下のような変形をする．

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2}{(z-\omega_1)(z-\omega_2)(z-\omega_3)(z-\omega_4)} \\ &= \frac{1}{z-\omega_1}\frac{z^2}{(z-\omega_2)(z-\omega_3)(z-\omega_4)} \\ &= \frac{1}{z-\omega_1}g(z) \end{aligned}$$

$g(z)$ は γ_1 の内部では正則である．ゆえに $g(z)$ は $z-\omega_1$ のべき級数に書ける．定数項を求めるには $g(\omega_1)$ を求めればよい．

1.2　複素関数論を用いて実関数の積分値を求める

複素関数論を用いて次の実関数の具体的な積分値を求め方について説明する．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

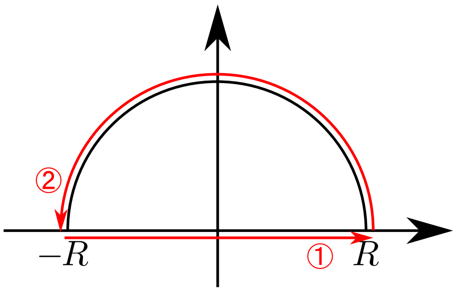
まず複素数で定義された関数 $f(z)=\frac{z^2}{1+z^4}$ を考え，図のような半円の経路 $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$ を設定する．

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

①が γ_1 に，②が γ_2 にあたる．

このとき，$R\to\infty$ とすると $\int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$ となるため（詳細は節 1.3），

$$\int_{\gamma_1} f dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx$$

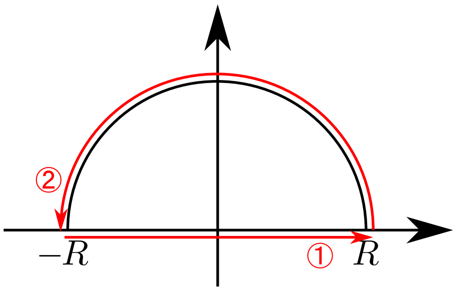


のみを考えればよい．
また R が十分に大きくなれば関数 $f(z)$ の 2 つの極が半円内に入り，それぞれ ω_1, ω_2 とすると，留数定理から以下の式が成り立つ．

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i(\omega_1\text{の留数} + \omega_2\text{の留数})$$

1.3　積分路の計算

節 1.1 では，半円の経路のうちの図の①の積分路のみを計算したが，②を計算しなくても良いことを示す．



$\gamma_2 : \theta \in [0, \pi] \to R(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_2} \frac{z^2 dz}{1+z^4}\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{R^2(\cos\theta + i\sin\theta)^2}{1+R^4(\cos\theta + i\sin\theta)^4}\frac{dz}{d\theta}d\theta\right| \\
&= \left|\int_0^\pi \frac{R^3(\cos\theta + i\sin\theta)^2(-\sin\theta + i\cos\theta)}{1+R^4(\cos\theta + i\sin\theta)^4}d\theta\right| \\
&\le \frac{R^3}{R^4-1} \\
&= 0 \qquad (R \to \infty)
\end{aligned}$$

1.4 問題

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3} \qquad (a>0)$$

となることを示せ．

§ ヒント

$z^2+a^2=0$ のときに極となるため，極になる点は $z=\pm ai$ である．したがって，次のように変形できる．

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2} = \frac{1}{(z-ai)^2}\frac{z^2}{(z+ai)^2}$$

ここで，$g(z) = \dfrac{z^2}{(z+ai)^2}$ とおくと $g(z)$ は ai のところでは正則なので，$g(z) = \alpha_0+\alpha_1(z-ai)+\alpha_2(z-ai)^2+\cdots$ となる．これを用いると $f(z)$ は以下のように書き換えられる．

$$\frac{g(z)}{(z-ai)^2} = \frac{\alpha_0}{(z-ai)^2}+\frac{\alpha_1}{z-ai}+\alpha_2+\cdots$$

さきほどは重解がなかったため α_0 を求めればよかったが，この場合は重解になるため，留数を求めたければ α_1 を計算すれば良い．したがって，α_1 は微分を用いて次のように計算できる．

$$g'(z) = \alpha_1+2\alpha_2(z-ai)$$

1.5 問題

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} \qquad (a>1)$$

となることを示せ．

§ ヒント

偶関数であるため次を求めれば良い．

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}$$

このとき，$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ とおくと，逆数は $\dfrac{1}{z} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ となる．これらは指数法則が成り立つため，$e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = 1$ となることがわかる．また，この 2 つを足して割ると以下の式が得られる．

$$\cos\theta \ = \ \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$$

ここで，$\dfrac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz$ から $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ であるため，$\gamma : \theta \in [0, 2\pi] \to e^{i\theta}$ とすると，以下のように変形できる．

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta} \\
&= \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{a+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}\frac{dz}{iz} \\
&= \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{a+\frac{1}{2z}(z^2+1)}\frac{dz}{iz} \\
&= \int_\gamma \frac{z}{z^2+2az+1}\frac{dz}{iz} \\
&= \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{dz}{z^2+2az+1} \\
&= \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{dz}{(z-\alpha)(z-\beta)}
\end{aligned}$$

このとき，$z^2+2az+1=0$ から $z = -a \pm \sqrt{a^2-1}$ が得られるので，$\alpha = -a + \sqrt{a^2-1}$，$\beta = -a - \sqrt{a^2-1}$ とおける．ここで，α は単位円の中，β は単位円の外にあることに注目すると．留数定理を用いると以下のような積分になる．

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta} \ = \ \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

1.6　問題

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a+\sin^2\theta} = \frac{\pi}{2(a(a+1))^{\frac{1}{2}}}z \qquad (a>0)$$

となることを示せ．